Análisis de estática comparativa de la función de beneficio de una firma

Carlos Swoboda

Introducción

El objetivo de este artículo es presentar los conceptos más relevantes en torno a la función de beneficio de una firma que actúa en un mercado competitivo. Esta última situación se presenta tanto en el mercado del producto como en el mercado de los factores de la producción. En la primera parte el análisis se efectúa utilizando una función de producción general para luego pasar a considerar el caso específico de la función de producción Cobb-Douglas. En ambas oportunidades se recurre al calculo a los efectos de mostrar cómo se determinan los valores óptimos y cómo se obtiene la función de demanda de factores, la oferta del producto y la de beneficios indirecta. Aquí se ve el por qué se necesita trabajar con una función de producción estrictamente cóncava. Además se detallan las principales propiedades de las relaciones mencionadas. El entendimiento de estos aspectos provee de una buena base para el tratamiento posterior de temas más complejos del análisis microeconómico.

El caso de una empresa que emplea un factor de la producción fijo y el otro variable

Suponga que se tiene una empresa que opera en un mercado competitivo tanto por el lado del producto como por el lado de los factores. La firma produce un solo bien denominado X usando una cantidad fija del factor capital (K) igual a Ko y una cantidad variable del factor trabajo (L). El bien X se vende al precio p y el trabajo se adquiere a un valor w, mientras que el precio del capital es igual a r, en todos los casos dichos precios están dados, ya que la empresa por si sola no tiene poder como para influir en el mercado (la compañía es tomadora de precios).

En este modelo la única preocupación del dueño o del administrador de la empresa radica en determinar el volumen de producción que haga máximo el beneficio de corto plazo. Obviamente para lograr esta producción óptima tiene que buscar cuál es la cantidad y la combinación más adecuada de los factores.

La forma técnicamente más eficiente en que se combina el capital con el trabajo para transformarse en el producto final X viene dada por la siguiente función de producción:

$$X = F(Ko, L) \qquad (1)$$

Dicha función es continua y tiene derivadas parciales primera y segunda que también son continuas; donde el producto marginal del trabajo es positivo $d X / d L > 0$.

La función de beneficio de corto plazo de la firma se define como la diferencia entre el ingreso total (p X) y el costo total (r Ko + w L):

$$B = p X - r Ko - w L \qquad (2)$$

La expresión dada en (2) es la función objetivo a optimizar. El dueño o el administrador de la compañía trata de determinar cuál es la cantidad óptima a contratar de mano de obra, dado el nivel Ko de capital disponible y el precio de los factores de la producción y del bien X, que hace que el beneficio de la compañía sea máximo (al fijar una cantidad de L y combinarlo con Ko queda determinado, a través de F el volumen de producción). Este es un problema de optimización no restringida relativamente simple, ya que se busca encontrar el valor de una sola variable L que resuelva la expresión que a continuación se describe (la misma es similar a la dada anteriormente sólo que ahora se sustituyó a X por la expresión analítica correspondiente a la función de producción definida en (1)):

$$\underset{L}{\text{maximizar}}\ B = p\ F(Ko, L) - r\ Ko - w\ L \qquad (3)$$

El valor óptimo de L es aquel que cumple con los requisitos establecidos por la condición de primer y de segundo orden para la existencia de un máximo no restringido. La condición de primer orden es igual a:

$$Bl = p\ Fl(Ko,L) - w = 0 \quad \text{o} \quad p\ Fl(Ko,L) = w \qquad (4)$$

donde: Bl representa a la derivada parcial del beneficio con respecto a L.
Fl representa al producto marginal del trabajo.

La expresión dada en (4) dice que la firma contratará mano de obra hasta el punto en el cual el valor del producto marginal [p Fl(Ko,L)] sea igual a la remuneración de dicho factor (w).

Para que el valor de L obtenido anteriormente asegure alcanzar el máximo beneficio también tiene que satisfacer la condición de segundo orden:

$$Bll = p\ Fll < 0 \quad \text{o} \quad Fll < 0 \qquad (5)$$

Es decir, para que Fll sea negativo la función de producción debe presentar rendimientos decrecientes ya que p siempre es positivo. El producto marginal del trabajo disminuye a medida que se incrementa el uso de mano de obra manteniendo constante el empleo del otro factor.

Como se puede apreciar en el problema planteado el valor óptimo de la variable L depende de cuatro parámetros w, r, Ko y p. Sin embargo, al estar fijo el volumen de capital en un monto Ko, el precio del capital no es relevante en la determinación de la cantidad óptima de mano de obra a contratar (r Ko es un costo fijo que no interviene en la condición de primer orden). Entonces, la demanda de trabajo pasa a depender de los siguientes tres parámetros:

$$L = L^* (w,Ko,p) \qquad (6)$$

Resta aún por determinar cuál es el efecto que una modificación en el nivel de salario trae sobre la cantidad demandada de trabajo. Para averiguar esto hay que ver que sucede con la pendiente de la demanda de mano de obra (d L / d w). La forma analítica de dicha derivada parcial se obtiene a través de los siguiente pasos: en primer término en la condición de primer orden se sustituye a L por la demanda de trabajo recientemente calculada y luego se deriva con respecto a w. Queda entonces la siguiente identidad:

$$p\, Fl[Ko, L^*(w,Ko,p)] - w = 0 \qquad (7)$$

Al ser L* una expresión tal que maximiza los beneficios de la firma, para diferentes valores de w y p la misma siempre debe satisfacer la condición de primer orden. Diferenciando con respecto a w se obtiene:

$$p\, Fll[Ko, L^*(w,Ko,p)] \frac{d L^*}{d w} - 1 = 0$$

$$p\, Fll[Ko, L^*(w,Ko,p)] \frac{d L^*}{d w} = 1$$

Luego, la pendiente de la demanda de trabajo es igual a:

$$\frac{d L^*}{d w} = \frac{1}{p\, Fll} < 0 \qquad (8)$$

La misma, como era de esperar, es negativa ya que de la condición de segundo orden surge que Fll < 0 (la función de producción presenta rendimientos decrecientes).

El caso de una empresa que emplea dos
factores de la producción variables

Suponga, al igual que en el punto previo, que la firma bajo análisis actúa en un mercado competitivo tanto del lado del producto como de los factores que utiliza. La misma produce un único bien X que lo vende a un precio fijo p y adquiere los factores de la producción capital y trabajo a valores dados r y w respectivamente.

El problema del administrador o del propietario de la firma consiste en determinar la cantidad a contratar de capital y de trabajo y la mejor combinación entre ambas atendiendo a los precios de los factores y al precio del bien X. Una vez establecidas estas cantidades queda determinado el volumen de producción que hace máximo el beneficio.

La función beneficio de la empresa, como ya se dijo, es igual a la diferencia entre el ingreso total y el costo total de producir una cantidad dada del bien X:

$$B(X) = p\,X - w\,L - r\,K \qquad (9)$$

El bien X se obtiene combinando el capital y el trabajo a través de la siguiente función de producción:

$$X = F(K,L) \qquad (10)$$

Aquí se supone que la función de producción es continua y posee derivadas parciales primera y segunda siendo estas también continuas. Además también cumple con la condición de que $F(0,0) = 0$, esto significa que la empresa en cualquier momento del tiempo puede decidir ya sea terminar con sus actividades o no emplear ningún recurso, de modo tal que la producción pasa a ser nula y el beneficio es igual a cero.

Dado que la empresa está buscando obtener la cantidad de trabajo y capital que haga máxima la diferencia entre el ingreso total y el costo total, el problema a resolver puede plantearse como uno de optimización no restringida. Para ello en (9) se sustituye a X por su igual dado en (10) quedando el siguiente problema de optimización:

$$\underset{L,K}{\text{Maximizar}} \; B(K, L) = p\,F(K, L) - w\,L - r\,K \qquad (11)$$

El beneficio de la firma es una función de K y de L y por tanto hay que maximizar con respecto a dichas variables. Los valores de L y de K que resuelven este problema de optimización se obtienen planteado tanto la condición de primer como la de segundo orden para la existencia de un máximo no restringido. Se tiene entonces que:

a) La condición de primer orden

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dB}{dL} = Bl = p\,Fl - w = 0 \\[2ex] \dfrac{dB}{dK} = Bk = p\,Fk - r = 0 \end{array}\right. \quad \text{ó} \quad \left\{\begin{array}{l} p\,Fl = w \\[2ex] p\,Fk = r \end{array}\right. \qquad (12)$$

b) La condición de segundo orden para la existencia de un máximo requiere que los menores principales del determinante hessiano alternen en signo comenzando con el valor negativo:

$$Bll < 0$$
$$Bkk < 0$$
$$Bll\,Bkk - (Blk)^2 > 0$$

o en términos más simples:

$$F_{ll} < 0$$
$$F_{kk} < 0 \qquad (13)$$
$$F_{ll} F_{kk} - (F_{lk})^2 > 0$$

La interpretación económica de las expresiones que aparecen tanto en la condición de primer como en la de segundo orden, ya se trató parcialmente antes cuando se consideró el caso de un factor fijo y otro variable, no obstante se vuelve sobre algunos de esos puntos. Se tiene así que:

a.- La igualdad entre $p\ F_l = w$ o $p\ F_k = r$ indica que una firma que maximiza beneficios usa un factor de la producción hasta el nivel en el cual la contribución que este hace al ingreso total ($p\ F_l$ valor del producto marginal del factor trabajo o $p\ F_k$ valor del producto marginal del capital) es igual al costo de adquirir esa unidad adicional (w o r). En la medida que el valor del producto marginal sea mayor que el precio del factor siempre convendrá usar más del mismo, debido a que lo que se agrega al ingreso total es superior a lo que se añade al costo total.

b.- $F_{ll} < 0$; $F_{kk} < 0$: esta derivada parcial segunda indica que para obtener una adecuada solución del problema de optimización planteado la función de producción tiene que cumplir con la ley de los rendimientos decrecientes a escala, es decir se da que $tF(K,L) < F(tL,tK)$ (la función debe ser estrictamente cóncava en la cercanía del punto donde se da el máximo). Si existiesen rendimientos crecientes en todo el dominio siempre convendrá contratar más unidades de ese factor, lo cual no sería compatible con lo que normalmente se observa en los distintos mercados productores de bienes y servicios.

c) $F_{ll} F_{kk} - (F_{kl})^2 > 0$: el hecho de que se tenga que estar en presencia de funciones de producción con rendimientos decrecientes a escala tampoco es suficiente ya que además se necesita que se cumpla con el requisito enunciado al principio de este punto c). La interpretación económica de esta condición es poco intuitiva. La misma puede esbozarse en los siguientes términos, al modificarse el uso de un factor no sólo se ve afectado su propio producto marginal sino también el de los otros recursos, donde los efectos deben guardar una cierta relación. En forma más específica, si tanto Flk como Fkl (siendo Flk = Fkl) son en términos absolutos bastante más grande que Fll y Fkk se estará frente a una situación muy particular en el sentido de que una modificación en el uso de un factor afectará mucho más al producto marginal del otro recurso que al suyo propio.

Por ejemplo, si se aumenta el número de trabajadores, el producto marginal del trabajo disminuye. Sin embargo, si se da que Flk = Fkl > 0 el producto marginal del capital se desplaza hacia arriba y a la derecha en una magnitud importante llevando a niveles de compras del factor más elevadas. Pero, a su vez este aumento de las unidades de capital trae aparejado un aumento en el producto marginal del trabajo, ya que se había supuesto que: Flk > 0 (d PMgL / d k). Luego, la función producto marginal de L también se desplaza hacia arriba y a la derecha en una magnitud importante. De esta forma, si los efectos cruzados entre los recursos son lo suficientemente importantes, un incremento en el uso del trabajo lleva a que su producto marginal aumente entrando en contradicción con el principio de maximización, ya que en este caso sería cada vez más conveniente usar unidades adicionales de ambos factores. Entonces, el efecto cruzado entre todos los factores debe ser parecido al que se deduce de la vigencia de la ley de los rendimientos decrecientes a escala.

La solución óptima del sistema planteado

Suponga ahora que la retribución a los factores de la producción y el precio del bien X ya no toman un monto fijo o determinado. No obstante esta circunstancia el sistema planteado en (12) permite obtener los valores de L y de K que maximizan el beneficio para diferentes niveles de remuneración al trabajo y al capital o para distintos precios del bien X. Esto no es otra cosa que la función de demanda de capital y trabajo.

La solución de este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, bajo el supuesto de que el determinante jacobiano del mismo es distinto de cero, da como resultado las funciones de demanda de los factores de la producción cuyos argumentos son sus respectivos precios y el precio del bien X:

$$\begin{aligned} L &= L^*(w, r, p) \\ K &= K^*(w, r, p) \end{aligned} \qquad (14)$$

Entonces, si la función de producción es estrictamente cóncava siempre será posible definir en forma adecuada funciones de demanda de factores, las que a su vez serán continuas para cualquier precio positivo del insumo. Además, las demandas de factor tienen la propiedad de ser homogéneas de grado cero (característica que surge de la expresión analítica de la función de beneficios).

Efectos de un cambio en los precios de los factores de la producción y del producto final sobre la demanda de capital y de trabajo

A los fines de observar el impacto que una modificación en el precio de alguno de los factores de la producción o en el precio del bien final tiene sobre la demanda de trabajo o de capital se recurre al sistema de dos ecuaciones que aparece en la condición de primer orden:

$$\begin{cases} p\,Fl\,(K,L) - w = 0 \\ p\,Fk\,(K,L) - r = 0 \end{cases} \qquad (12)$$

y se sustituye a K y a L por las expresiones dadas en (14). Quedando el siguiente sistema de dos ecuaciones con tres parámetros, sobre el cual se ha de intentar determinar las pendientes de las funciones de demanda de trabajo y de capital cuando varia w, r ó p.

$$\begin{cases} p\,Fl\,[K^*(w,r,p),\,L^*(w,r,p)] - w = 0 \\ \\ p\,Fk\,[K^*(w,r,p),\,L^*(w,r,p)] - r = 0 \end{cases} \qquad (15)$$

Los efectos que los cambios en los precios (w, r, p) producen sobre las funciones de demanda de trabajo o de capital se obtienen diferenciando totalmente el sistema dado en (15) con respecto a dichos precios. De esta manera se tienen los siguientes tres casos, haciendo previamente igual a cero los otros efectos no contemplados:

a) Efectos de un cambio en la remuneración al trabajo w

En esta oportunidad en ambas ecuaciones se diferencia parcialmente con respecto a w:

$$\begin{cases} p\,Fll \dfrac{d\,l}{d\,w} + p\,Flk \dfrac{d\,k}{d\,w} - 1 = 0 \\ \\ p\,Fkl \dfrac{d\,l}{d\,w} + p\,Fkk \dfrac{d\,k}{d\,w} - 0 = 0 \end{cases} \qquad (16)$$

En términos matriciales se tiene:

$$\begin{pmatrix} p\,Fll & p\,Flk \\ p\,Fkl & p\,Fkk \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\,l / d\,w \\ d\,k / d\,w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La solución del sistema planteado anteriormente da la pendiente de la demanda de trabajo y de capital cuando se modifica la retribución al trabajo:

$$\frac{d\,L}{d\,w} = \frac{p\,Fkk}{p^2\,(Fll\,Fkk - F^2\,lk)} = \frac{Fkk}{p\,(Fll\,Fkk - F^2\,lk)} < 0$$

En este caso se tiene que un aumento en el precio del trabajo trae aparejado una reducción en la cantidad demandada de mano de obra, ya que Fkk es menor que cero y Fll Fkk - F^2 lk > 0 (ambos signos surgen de la condición de segundo orden planteada oportunamente).

$$\frac{d\,K}{d\,w} = \frac{-\;p\,Fkl}{p^2\,(Fll\,Fkk - F^2\,lk)} = \frac{-\;Fkl}{p\,(Fll\,Fkk - F^2\,lk)}$$

En esta expresión al no encontrarse, en ninguna parte del modelo, determinado en forma explícita cuál es el signo de Fkl no se puede saber con exactitud el efecto que tiene sobre la demanda de capital un cambio en el precio de la mano de obra. Sin embargo, en la mayoría de los modelos se considera que un aumento en la cantidad usada de un factor incrementa el producto marginal del otro, de modo tal que Flk pasa a ser positiva y el problema del signo queda resuelto (en esta alternativa se dice que entre los factores existe complementariedad). Esto obviamente también queda resuelto cuando se trabaja con una función de producción específica (por ejemplo en el caso de una Cobb-Douglas la derivada parcial Flk es mayor que 0; luego el signo de la pendiente es negativo).

b) Efectos de un cambio en la remuneración al capital r

En esta oportunidad el sistema dado en (15) se diferencia con respecto al precio del capital r. Una vez realizadas las operaciones pertinentes, que son similares a las enunciadas con antelación, se tiene la siguiente pendiente:

$$\frac{dL}{dr} = \frac{-\ p\ F_{kl}}{p^2\ (F_{ll}\ F_{kk} - F^2{}_{lk})} = \frac{-\ F_{kl}}{p\ (F_{ll}\ F_{kk} - F^2{}_{lk})}$$

Al igual que en el punto previo el signo de la derivada parcial queda indeterminado, salvo que expresamente se especifique el tipo de función de producción con la que se está trabajando o que se suponga que existe complementariedad entre los factores.

$$\frac{dK}{dr} = \frac{p\ F_{kk}}{p^2\ (F_{ll}\ F_{kk} - F^2{}_{lk})} = \frac{F_{kk}}{p\ (F_{ll}\ F_{kk} - F^2{}_{lk})} < 0$$

En este caso se tiene que un aumento en el precio del factor capital trae aparejado una reducción en la cantidad demandada de capital.

La propiedad de reciprocidad

Observando las expresiones correspondientes a las derivadas parciales de las demandas de trabajo o de capital con respecto al precio del otro factor se obtiene una interesante relación denominada de reciprocidad:

$$\frac{dK}{dw} = \frac{-\ F_{kl}}{p\ (F_{ll}\ F_{kk} - F^2{}_{lk})} = \frac{dL}{dw}$$

c) Efectos de un cambio en el precio del producto X

El impacto que un cambio en el precio del bien X tiene sobre la demanda de capital o de trabajo se obtiene diferenciando la condición de primer orden planteada en (15) con respecto al precio del producto. Se tiene así un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que son las pendientes de la demanda de mano de obra y de capital con respecto al precio del bien final X. Se tiene así la posibilidad de contar con una idea acerca de cómo se modifica el uso de los insumos cuando varía el precio de X. Realizando la operación indicada quedan definidas las dos ecuaciones que constituyen el sistema mencionado:

$$\begin{cases} p\, Fll \dfrac{d\, l}{d\, p} + p\, Flk \dfrac{d\, k}{d\, p} + Fl \dfrac{d\, p}{d\, p} = 0 \\[2ex] p\, Fkl \dfrac{d\, l}{d\, p} + p\, Fkk \dfrac{d\, k}{d\, p} + Fk \dfrac{d\, p}{d\, p} = 0 \end{cases} \qquad (17)$$

En forma matricial:

$$\begin{pmatrix} p\, Fll & p\, Flk \\ p\, Fkl & p\, Fkk \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\, l / d\, p \\ d\, k / d\, p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - Fl \\ - Fk \end{pmatrix}$$

La solución del sistema es igual a:

$$\frac{d\, L}{d\, p} = \frac{- Fl\, Fkk + Fk\, Flk}{p\, (Fll\, Fkk - F^2\, lk)} \qquad (18)$$

$$\frac{dK}{dp} = \frac{-F_k F_{ll} + F_l F_{lk}}{p(F_{ll} F_{kk} - F^2_{lk})} \qquad (19)$$

Al igual que en los dos casos anteriores al no conocer con antelación el signo de la derivada parcial cruzada Flk tampoco puede deducirse cuál será la dirección del cambio en las cantidades demandadas de cada uno de los factores cuando varía el precio del producto. Ahora bien, si Flk > 0 las pendientes de las demandas de trabajo y de capital serán positivas. Esto significa que cuando sube el precio del producto aumenta la cantidad demandada de ambos factores de la producción siendo esto razonable, ya que al incrementarse el precio del producto X la empresa tenderá a aumentar el nivel de producción. Aquí cabe señalar que ambas derivadas parciales no pueden al mismo tiempo ser negativas, ya que difícilmente una suba en el precio del bien final traiga aparejado una reducción simultánea tanto en la demanda de capital y como en la de trabajo.

Comparación entre las demandas de corto y de largo plazo

A esta altura del desarrollo resulta conveniente comparar las pendientes de las demandas de trabajo de corto y largo plazo. Para ver esto simplemente se toma la diferencia entre las pendientes de ambas demandas de mano de obra (a la de largo plazo se le resta la de corto plazo). De este modo se tiene que:

$$\frac{dL}{dw} - \frac{dL}{dw} = \frac{F_{kk}}{p(F_{ll} F_{kk} - F^2_{lk})} - \frac{1}{p F_{ll}}$$

$$\frac{dL}{dw} - \frac{dL}{dw} = \frac{p F_{ll} F_{kk} - p(F_{ll} F_{kk} - F^2_{lk})}{}$$

$$dw \qquad dw \qquad p\,(F_{ll}\,F_{kk} - F^2_{lk})\,F_{ll}$$

$$\frac{dl}{dw} - \frac{dl}{dw} = \frac{F^2_{lk}}{p\,(F_{ll}\,F_{kk} - F^2_{lk})\,F_{ll}} < 0$$

ya que $F_{ll} < 0$.

La diferencia negativa entre estas dos pendientes indica que el cambio en la cantidad demanda de L debido a una variación en su propio precio es más grande, en valor absoluto, cuando el capital es variable (largo plazo) y no fijo (corto plazo).

La función oferta de la firma que actúa en un mercado competitivo

La obtención de la función oferta de la firma luego de las consideraciones efectuadas anteriormente surge en forma bastante simple. Para ello se recurre a la función de producción definida en su forma tradicional (dependiendo de K y de L):

$$X = F(K, L)$$

En esta expresión, bajo las condiciones establecidas en los puntos previos, es posible sustituir a L y K por las funciones obtenidas en (14) de forma tal que la producción pasa a depender de los precios de los factores y del precio del bien X:

$$X^* = F[K^*(w, r, p), L^*(w, r, p)]$$

$$X^* = F(w, r, p)$$

Aquí se observa que el producto total se encuentra relacionado con su propio precio y con la remuneración a los factores de la producción. Queda ahora por determinar cómo es dicha relación y cuáles son los efectos que los cambios en los mencionados precios tienen sobre la oferta del bien X. Para ello se calcula la derivada parcial de X con respecto a los precios (w, r p). Al realizar las operaciones señaladas surgen las siguientes pendientes:

a) Efectos de un cambio en w sobre la producción de X:

$$\frac{dX}{dw} = \frac{df}{dL}\frac{dL}{dw} + \frac{df}{dK}\frac{dK}{dw} = Fl\frac{dL}{dw} + Fk\frac{dK}{dw}$$

Sustituyendo las derivadas parciales d L / d w y d K / d w por sus iguales:

$$\frac{dX}{dw} = Fl\frac{Fkk}{p\,(Fll\ Fkk - F^2\ lk)} + Fk\frac{-Fkl}{p\,(Fll\ Fkk - F^2\ lk)}$$

$$\frac{dX}{dw} = \frac{Fl\ Fkk - Fk\ Fkl}{p\,(Fll\ Fkk - F^2\ lk)}$$

Si se compara esta última expresión con la obtenida en puntos anteriores, más concretamente cuando se calculó el impacto de un cambio en el precio del bien sobre las cantidades demandas de los factores (18) se tiene que:

d X Fl Fkk - Fk Fkl d L

$$\frac{}{d w} = \frac{}{p\,(F_{ll} F_{kk} - F^2{}_{lk})} = -\frac{}{d p}$$

b) Efectos de un cambio en p sobre la oferta de X

Derivando parcialmente a la función oferta del bien X con respecto a su propio precio p se tiene:

$$\frac{d X}{d p} = \frac{d f}{d L}\,\frac{d L}{d p} + \frac{d f}{d K}\,\frac{d K}{d p} = F_l\,\frac{d L}{d p} + F_k\,\frac{d K}{d p}$$

Sustituyendo a las derivadas parciales d L / d p y d K / d p por sus iguales queda:

$$\frac{d X}{d p} = \frac{-F_l^2 F_{kk} + 2 F_{lk} F_l F_k - F^2{}_k F_{ll}}{p\,(F_{ll} F_{kk} - F^2{}_{lk})} > 0$$

Esta última expresión es positiva ya que el numerador es positivo en virtud de que la función de producción F(K, L) es estrictamente cóncava y el denominador también lo es (surge de la condición de segundo orden), en consecuencia la función oferta del bien X tiene pendiente positiva. Esto implica que cuando el precio de X sube la producción también lo hace (esto no podría lograrse si de manera simultánea d L / d p y d K / d p son negativas).

La función indirecta de beneficios

La función indirecta de beneficios que indica la máxima ganancia que se logra cuando el vector de precios de los insumos y del bien final es (w,r,p). se obtiene sustituyendo en la expresión dada en (11) a los factores trabajo y capital por sus respectivas funciones de demanda. De esta manera se tiene que:

$$B(w, r, p) = p\, F[L(w, r, p), K^*(w, r, p)] - w\, L^*(w, r, p) - r\, K^*(w, r, p)$$

La anterior función de beneficio indirecta es homogénea de grado uno para cualquier valor λ mayor o igual a cero [$B(\lambda w, \lambda r, \lambda p) = \lambda\ B(w,r,P)$]. Además es no decreciente en P y no creciente en w y r.

Esta expresión sirve para ver que sucede con el beneficio si se produce una modificación en la remuneración a los factores de la producción o en el precio del producto que se está considerando. Se tiene así que:

a) Derivando parcialmente con respecto a w queda:

$$\frac{dB}{dw} = p\, Fl\ \frac{dL}{dw} + p\, Fk\ \frac{dK}{dw} - L - w\ \frac{dL}{dw} - r\ \frac{dK}{dw}$$

Agrupando términos y recordando que acorde a la información que proviene de la condición de primer orden surge que:

$$(p\, Fl - w)\ \frac{dL}{dw} = 0 \qquad \text{ya que} \qquad p\, Fl - w = 0$$

$$(p\, Fk - r)\ \frac{dK}{dw} = 0 \qquad \text{ya que} \qquad p\, Fk - r = 0$$

Luego:

d B

$$\frac{\quad}{d\,w} = -\,L < 0$$

Si ahora se deriva dos veces la función indirecta de beneficio se tiene:

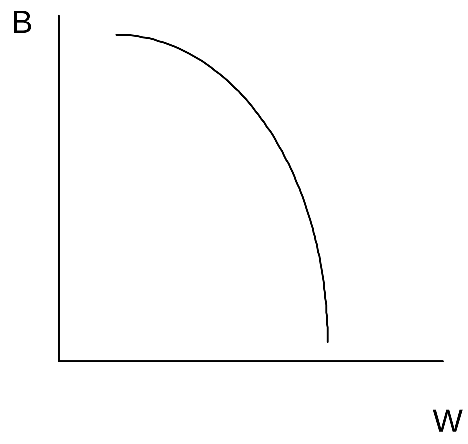
$$\frac{d^2 B}{d\,w^2} = -\,\frac{d\,L}{d\,w} > 0$$

La misma es positiva ya que $d\,L \,/\, d\,w < 0$. Esto hace que la función indirecta de beneficio sea convexa.

En consecuencia la función de beneficios indirecta está inversamente relacionada con la remuneración a los factores de la producción, es decir cuando aumenta el salario el beneficio de la firma disminuye (Figura 1).

Figura 1

La función indirecta de beneficio



b) Derivando parcialmente con respecto a p

$$\frac{d\,B}{d\,p} = F + p\,F_l\,\frac{d\,L}{d\,p} + p\,F_k\,\frac{d\,K}{d\,p} - w\,\frac{d\,L}{d\,p} - r\,\frac{d\,K}{d\,p}$$

Agrupando términos y recordando que de la condición de primer orden surge que:

$$(p\,Fl - w)\,\frac{dL}{dp} = 0 \qquad \text{ya que} \qquad p\,Fl - w = 0$$

$$(p\,Fk - r)\,\frac{dK}{dp} = 0 \qquad \text{ya que} \qquad p\,Fk - r = 0$$

Luego:

$$\frac{dB}{dp} = F(K, L) = X$$

$$\frac{d^2 B}{d p^2} = \frac{dX}{dp} > 0$$

A las propiedades obtenidas en los puntos a y b desarrollados previamente se las conoce con el nombre de Lema de Hotelling.

El caso de los rendimientos constantes a escala

Si la función de producción presenta rendimientos constantes a escala los beneficios de la firma son ilimitados salvo que estos sean iguales a cero. Para ver esto suponga que existe un plan de producción tal que los beneficios son positivos. Luego:

$$B = p\,F(K, L) - w\,L - r\,K > 0$$

Si se incrementa el uso de los factores de la producción en una proporción $t > 1$, el beneficio será:

$$p\,F(t\,K, t\,L) - w\,tL - r\,tK = t\,[p\,F(K, L) - w\,L - r\,K] = t\,B$$

Donde $t\,B > B$. En consecuencia, si el beneficio es positivo para un determinado plan de producción, estos pueden hacerse cada vez más grandes simplemente incrementando el uso de los recursos en una proporción mayor que uno. En cuyo caso no existirá un plan de producción tal que maximize las ganancias. En cambio, si la firma opera con un nivel de beneficios igual a cero, el volumen de producción le será indiferente, sin embargo una vez que este ha sido determinado se podrá definir las funciones de demanda de recursos y la oferta de la empresa.

Un caso de aplicación usando la función de producción del tipo Cobb-Douglas

Suponga una firma que produce el bien X y cuyo precio es p. La compañía opera en un mercado de competencia perfecta ya sea por el lado del producto como por el lado de los factores. El objetivo del administrador es maximizar beneficios y desea conocer la función oferta del bien X, las funciones de demanda de factores, los signos de las respectivas pendientes, etcétera. La función de producción de la empresa es del tipo Cobb-Douglas:

$$X = L^a\ K^b \qquad (1)$$

La función objetivo de la firma es:

$$\underset{L,\,K}{\text{maximizar}}\ B = p\,L^{a}\ K^{b} - w\,L - r\,K \qquad (2)$$

a) La condición de primer orden para la existencia de un máximo es:

$$Bl = p\,a\,L^{a-1}\ K^{b} - w = 0 \qquad (3.a)$$

$$Bk = p\,b\,L^{a}\ K^{b-1} - r = 0 \qquad (3.b)$$

b) La condición de segundo orden

Esta condición requiere el cumplimiento de:

b.1) $Bll < 0$ y $Bkk < 0$

b.2) $Bll\ Bkk - B^{2}\,lk > 0$

Luego:

$Bll = p\,a\,(a-1)\,L^{a-2}\ K^{b} < 0$ siempre que $a < 1$

$Bkk = p\,b\,(b-1)\,L^{a}\,K^{b-2} < 0$ siempre que $b < 1$

$Blk = p\,a\,b\,L^{a-1}\ K^{b-1} > 0$

El punto b.1) se satisface sin mayores inconvenientes siempre que se den las condiciones previamente establecidas; pero esto no ocurre para b.2) y por ende es necesario efectuar algunas consideraciones adicionales. Para ello se parte de:

$$Bll\ Bkk - B^{2}\,lk > 0$$

y se sustituye cada componente por sus iguales ya calculados, quedando:

$$p\ a\ (a - 1)\ L^{a-2}\ K^{b}\ p\ b\ (b - 1)\ L^{a}\ K^{b-2} - [p\ a\ b\ L^{a-1} K^{b-1}]^{2} > 0$$

Agrupando términos queda:

$$a\ b\ (a - 1)\ (b - 1)\ L^{2a-2}\ K^{2b-2} - [a\ b]^{2}\ L^{2a-2}\ K^{2a-2} > 0$$

$$a\ b\ (a\ b - b - a + 1)\ L^{2a-2}\ K^{2b-2} - [a\ b]^{2}\ L^{2a-2}\ K^{2a-2} > 0$$

Aquí se puede eliminar el término a b:

$$(a\ b - b - a + 1)\ L^{2a-2}\ K^{2b-2} - a\ b\ L^{2a-2}\ K^{2a-2} > 0$$

Sacando factor común queda:

$$(a\ b - b - a + 1 - a\ b)\ L^{2a-2}\ K^{2b-2} > 0$$

Pasando al segundo miembro los términos en L y K dado que son estrictamente positivos se tiene:

$$(1 - a - b) > 0 \quad \text{o} \quad a + b < 1$$

Luego, para que se cumpla satisfactoriamente con la condición de segundo orden se tiene que verificar que la función de producción presente rendimientos decrecientes a escala o en otros términos que la función de producción sea homogénea de grado menor que uno. También puede decirse que en las cercanías del máximo la función de producción tiene que ser estrictamente cóncava.

La demanda de trabajo y la demanda de capital

Una vez establecidas las condiciones de primer y segundo orden se trata de determinar la estructura analítica de las funciones de demanda de factores de la producción. Para ello se parte de la condición de primer orden:

$$Bl = p\ a\ L^{a-1}\ K^{b} - w = 0 \qquad 3.a$$

$$Bk = p\ b\ L^{a}\ K^{b-1} - r = 0 \qquad 3.b$$

De aquí surge que:

$$p\ a\ L^{a-1}\ K^{b} = w$$

$$K^{b} = \frac{w}{p\ a\ L^{a-1}}$$

$$K = \frac{w^{1/b}}{(p\ a\ L^{a-1})^{1/b}}$$

Sustituyendo en 3.b queda:

$$p\ b\ L^{a} \left(\frac{w^{1/b}}{(p\ a\ L^{a-1})^{1/l}} \right)^{b-1} = r$$

$$p\ b\ L^{a}\ \frac{w^{(b-1)/b}}{p^{(b-1)/b}\ a^{(b-1)/b}\ L^{(a-1)(b-1)/b}} = r$$

$$r = p\, b\, L^{a}\ w^{(b-1)/b}\ p^{-(b-1)/b}\ a^{-(b-1)/b}\ L^{-(a-1)(b-1)/b}$$

$$r = b\ w^{(b-1)/b}\ p^{1/b}\ a^{-(b-1)/b}\ L^{(a+b-1)/b}$$

Despejando L se tiene:

$$L^{(a+b-1)/b} = \frac{r}{b\ w^{(b-1)/b}\ p^{1/b}\ a^{-(b-1)/b}}$$

Luego, la demanda de mano de obra queda igual a:

$$L = \left(\frac{r}{w^{(b-1)/b}\ p^{1/b}\ a^{-(b-1)/b}} \right)^{b/(a+b-1)}$$

También puede expresarse como:

$$L = r^{b/(a+b-1)}\ b^{-b/(a+b-1)}\ w^{(1-b)/(a+b-1)}\ p^{-1/(a+b-1)}\ a^{(b-1)/(a+b-1)}$$

Haciendo a + b - 1 = c queda:

$$L = r^{b/c}\ b^{-b/c}\ w^{(1-b)/c}\ p^{-1/c}\ a^{(b-1)/c}$$

Ordenando los términos que integran la función demanda:

$$L = a^{(b-1)/c}\ b^{-b/c}\ w^{(1-b)/c}\ r^{b/c}\ p^{-1/c}$$

La función demanda de capital (K) se calcula de manera similar al empleado para el caso del trabajo. Para ello se parte de:

$$p\,a\,L^{a-1}\,K^{b} = w$$

$$L = \left(\frac{r}{p\,a\,K^{b}} \right)^{1/(a-1)}$$

Sustituyendo en 3.b se tiene:

$$p\,b \left(\frac{w}{p\,a\,K^{b}} \right)^{a/(a-1)} K^{(b-1)} = r$$

$$p\,b\,\frac{w^{a/(a-1)}}{p^{a/(a-1)}\;a^{a/(a-1)}\;K^{a\,b/(a-1)}}\,K^{(b-1)} = r$$

$$r = b\;\; w^{a/(a-1)}\;\; p^{-1/(a-1)}\;\; a^{a/(a-1)}\;\; K^{(-a-b+1)/(a-1)}$$

Despejando K y ordenando términos queda la función demanda de capital que es igual a:

$$K = a^{-a/c}\;\; b^{(a-1)/c}\;\; w^{a/c}\;\; r^{(1-a)/c}\;\; p^{-1/c}$$

La pendiente de la función demanda de factores

El análisis de la pendiente de la función demanda de un insumo cuando varía su propio precio, el precio del otro factor o el precio del bien final toma como punto de partida la demanda del insumo (para el caso sólo se tendrá la demanda de trabajo):

$$L = a^{(b-1)/c}\ b^{-b/c}\ w^{(1-b)/c}\ r^{b/c}\ p^{-1/c}$$

1) Efectos de cambios en w y en r

$$\frac{d\,l}{d\,w} = \frac{1-b}{c}\ a^{(b-1)/c}\ b^{-b/c}\ w^{(1-b-c)/c}\ r^{b/c}\ p^{-1/c} < 0$$

Al ser c < 0 se tiene que cuando sube el salario disminuye la cantidad demandada de trabajo.

$$\frac{d\,l}{d\,r} = \frac{b}{c}\ a^{(b-1)/c}\ b^{-b/c}\ w^{(1-b)/c}\ r^{(b-c)/c}\ p^{-1/c} < 0$$

En este caso cuando aumenta la remuneración al capital disminuye la cantidad demandada de trabajo.

2) Cambios en p

$$\frac{d\,l}{d\,p} = -\frac{1}{c}\ a^{(b-1)/c}\ b^{-b/c}\ w^{(1-b)/c}\ r^{b/c}\ p^{-(1+c)/c} > 0$$

Un aumento en el precio del bien X trae aparejado un incremento en la demanda de trabajo. Estas relaciones también se verifican para el factor capital.

Obtención de la demanda de factores a través del uso de los logaritmos

Al igual que en el caso anterior se parte del siguiente problema de optimización:

$$\underset{L,K}{\text{maximizar}}\ B = p\, L^{a}\ K^{b} - w\, L - r\, K \qquad (2)$$

La condición de primer orden para la existencia de un máximo es la siguiente:

$$Bl = p\, a\, L^{a-1}\ K^{b} - w = 0 \qquad 3.a$$

$$Bk = p\, b\, L^{a}\ K^{b-1} - r = 0 \qquad 3.b$$

Tomando logaritmos naturales y agrupando términos queda:

$$(a - 1) \ln L + b \ln K = \ln w - \ln p - \ln a$$

$$a \ln L + (b - 1) \ln K = \ln r - \ln p - \ln b$$

En forma matricial se tiene:

$$\begin{pmatrix} (a-1) & b \\ a & (b-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln L \\ \ln K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln w - \ln p - \ln a \\ \ln r - \ln p - \ln b \end{pmatrix}$$

Usando la regla de Cramer queda:

$$\ln L = \frac{1}{1 - a - b} \{(b-1) \ln w - b \ln r + \ln p + (1-b) \ln a + b \ln b\}$$

$$\ln K = \frac{1}{1 - a - b} \{(a-1) \ln r - a \ln w + \ln p + (1-a) \ln b + a \ln a\}$$

Haciendo $1 - a - b = d$ y tomando antilogaritmo en ambos miembros de la igualdad queda definida cada una de las funciones demanda de trabajo y de capital. Luego:

$$L = a^{(1-b)/d} \; b^{b/d} \; w^{(b-1)/d} \; r^{-r/d} \; p^{1/d}$$

$$K = a^{a/d} \; b^{(1-a)/d} \; w^{-a/d} \; r^{(1-a)/d} \; p^{1/d}$$

La función oferta se obtiene a partir de:

$$x = L^{a} \; K^{b}$$

Sustituyendo a L y K por sus iguales previamente calculados se tiene la función oferta que depende del precio de los factores y del bien final:

$$x(w,r,p) = a^{a/d} \, b^{b/d} \; w^{-a/d} \; r^{-r/d} \; p^{2/d}$$

Por último, si se sustituye en la función beneficios:

$$B = p\,x - w\,L - r\,K$$

los términos L y K por sus iguales se tiene la función de beneficios indirecta que es igual a:

$$B = p\, a^{a/d} \, b^{b/d} \; w^{-a/d} \; r^{-r/d} \; p^{2/d} - w\, a^{(1-b)/d} \; b^{b/d} \; w^{(b-1)/d} \; r^{-r/d} \; p^{1/d} -$$

$$r$$

$$a^{a/d} \; b^{(1-a)/d} \; w^{-a/d} \; r^{(1-a)/d} \; p^{1/d}$$

Bibliografía

Arrow, K. and Hann, F. "General Competitive Analysis". Holden-Day. 1971.

Arrow, K. and Intriligator, M. "Handbook of Mathematical Economics". 1980

*Chiang, A. "Métodos Fundamentales de Economía Matemática". McGraw_ Hill. 1990.

Debreu, G. "Theory of Value". 1959. Versión en castellano: "Teoría del Valor" Antoni Bosch, editor, 1973.

Henderson, J y Quandt, R. "Microeconomic Theory: A Mathematical Aproach". McGraw-Hill. 1980. (HQ).

*Hirshleifer, J. y Glazer, A. "Microeconomía, Teoría y Aplicaciones". Prentice Hall Inc. 1992. (HG).

Intrigilator, M. "Mathematical Optimization and Economic Theory". Englewood Cliffs: Prentice-Hall Inc. 1971.

Koutsoyiannis, A. "Microeconomía Moderna". 1985.

Kreps, D. "A course in Microeconomic Theory" Princenton U. P. 1990.

Layard, P. and Walters, A. "Microeconomics Theory". 1978.

Mas-Collel, Whinston and Green. Microeconomic Theory. Oxen. 1995.

*Miller, R. y Meiners, R. "Microeconomía". McGraw-Hill. 1995. (MM).

Silberberg, E. "The Structure of the Economics". McGraw Hill. 1990.

*Swoboda, C. "Fundamentos. Revista de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de Río Cuarto". Nº 4 y 6. (CS-F).

*Varian, H. "Análisis Microeconómico". Antoni Bosch editor. 1992. (V).

El caso de un impuesto

Suponga que un productor monopolista que fabrica el bien x. Al mismo se le aplica un impuesto por unidad vendida de t pesos y se desea conocer como cambiaría el volumen de producción ante diferentes niveles del tributo. Para ver esto se parte de la siguiente función de beneficios:

$$B(x) = YT(x) - CT(x) - t\,x$$

donde: YT(x) es el ingreso total, CT(x) es el costo total y t el impuesto por unidad producida.

La condición de primer orden es igual a:

$$\frac{d\,B(x)}{d\,x} = YMg(x) - CMg(x) - t = 0$$

La condición de segundo orden para la existencia de un máximo es:

$$\frac{d^2\,B(x)}{d\,x^2} = \frac{d\,YMg(x)}{d\,x} - \frac{d\,CMg(x)}{d\,x} < 0$$

De la condición de primer orden surge que la empresa elegirá aquel volumen de producción que hace igual el ingreso marginal con el costo marginal más el impuesto:

$$YMg(x) = CMg(x) + t$$

La solución de esta igualdad es un valor x que depende de t, es decir x(t). Luego, sustituyendo en esta última expresión se tiene:

$$YMg[x(t)] - CMg[x(t)] - t = 0$$

Dado que se quiere conocer que sucede con el volumen de producción del bien X cuando varia el impuesto t, es necesario diferenciar la expresión anterior con respecto a t. De tal manera se obtiene que:

$$\frac{d\,YMg}{d\,x}\,\frac{d\,x}{d\,t} - \frac{d\,CMg}{d\,x}\,\frac{d\,x}{d\,t} - 1 = 0$$

Sacando factor común:

$$\left(d\,YMg \quad d\,CMg \right) \quad d\,x$$

$$\frac{\qquad}{d\,x} - \frac{\qquad}{d\,x}\;\frac{\qquad}{d\,t} - 1 = 0$$

Suponiendo que:

$$\frac{d\,YMg}{d\,x} - \frac{d\,CMg}{d\,x} \neq 0$$

Luego:

$$\left(\frac{d\,YMg}{d\,x} - \frac{d\,CMg}{d\,x}\right)\frac{d\,x}{d\,t} = 1$$

Despejando d x / d t:

$$\frac{d\,x}{d\,t} = \frac{1}{\dfrac{d\,YMg}{d\,x} - \dfrac{d\,CMg}{d\,x}} < 0$$

Es decir cuando sube el tributo disminuye la cantidad ofrecida de X.