Universidad Nacional de Córdoba
Facultad de Ciencias Económicas
Departamento de Economía y Finanzas

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA ECONÓMICA DE LOS NÚMEROS ÍNDICES

José A.Delfino

Córdoba, Agosto de 2002

INTRODUCCIÓN

Porqué existe una *teoría económica de los números índices*?. Acaso los índices de Laspeyres que emplea el Instituto Nacional de Estadística y Censos (INDEC) para medir la evolución del costo de vida o la producción industrial no forman parte de la teoría económica?. Sí, pero aunque parezca mentira hasta hace poco tiempo eso no estaba claro. Esto se debe a que Laspeyres definió ese agregado con el fin de que representara de un modo plausible el comportamiento de sus componentes individuales sin hacer referencia a ningún modelo de la teoría económica sino desde un punto de vista estrictamente estadístico, que por ese motivo los considera variables independientes. Sin embargo, cuando alrededor de un siglo después los economistas descubrieron que ese índice mide con exactitud los desplazamientos en el equilibrio del consumo o la producción inducidos por cambios en los precios de los bienes o los recursos productivos cuando se emplean funciones de utilidad o producción del tipo Leontief, comenzó a desarrollarse en forma coherente lo que ahora se denomina teoría económica de los números índices, y a llamarse *tradicional* al enfoque anterior.

Los primeros aportes de la teoría de los números índices al estudio de problemas económicos constituyen una respuesta a la necesidad de expresar en forma cuantitativa el comportamiento de un conjunto de variables individuales para las que no existen unidades físicas comunes, como ocurre con los bienes en la teoría del consumo y los servicios productivos en la teoría de la producción, por ejemplo. La cantidad de trigo que se obtiene sumando las toneladas cosechadas mide bien el nivel de producción de esa actividad; la suma de la de trigo, maíz, girasol y todos los demás cultivos no es ya un buen indicador de la producción agrícola, y si a este resultado se suma la producción de ganado, leche y los restantes productos pecuarios, la cifra que se obtiene no sirve para representar el volumen de la producción agropecuaria. Lo mismo puede decirse del promedio simple de esas cantidades. Porqué ocurre esto?. Porque mientras mayor sea el número de componentes, más heterogéneo será el conjunto y por lo tanto menos representativa la suma o el promedio. Además, esa falta de representatividad impide hacer comparaciones en el tiempo o el espacio.

La solución a estos problemas de agregación parece haber comenzado ponderando esos componentes individuales con variables que representan atributos cuantificables relacionados con el comportamiento que se espera exprese el conjunto. Por ese motivo, en los agregados económicos casi invariablemente se emplean como ponderadores los precios o las cantidades de los bienes o servicios, obteniéndose de ese modo indicadores que expresan el valor del grupo. Sin embargo, cuando se quiere avanzar un poco más con el fin de explicar los cambios en esos indicadores, las modificaciones en los promedios de los precios y de las cantidades de sus componentes no permiten obtener una buena medida de aquellos. Estas dificultades se resumen con ayuda del Cuadro 1, en el que se presenta un ejemplo muy sencillo que supone la existencia de dos productos, que podrían ser bienes de consumo o servicios productivos, cuyos precios y cantidades se simbolizan por P_i^j y X_i^j para i = 1,2 y j = 0,1, donde el subíndice indica el producto y el superíndice el período.

Los agregados simples de la primera parte brindan una pobre información sobre la importancia y el comportamiento de esas variables, porque en líneas generales muestran que las cantidades y el promedio por producto aumentaron de 80 a 100 y de 40 a 50 unidades, y que el precio medio y la suma de los precios (un indicador que prácticamente no se tiene en cuenta en las estadísticas económicas) se mantuvieron en 3,50 y 7$. Como consecuencia de ello las cantidades crecieron el 25% (100 / 80 = 1,25) y los precios cero, lo mismo que sus promedios. (Si se tiene en cuenta que las cantidades del primer producto se duplicaron y las del segundo cayeron un quinto, también podría decirse que el promedio de esos cambios fue del 40%; un análisis similar muestra que el cambio en los precios fue del 15%). Los agregados ponderados permiten a su vez apreciar que el valor aumentó un 44% porque pasó de 250 a 360 $. Los promedios indican, además, que la cantidad media se elevó de 35,71 a 51,43 unidades y el precio de 3,12 a 3,60 $, lo que implica tasas de crecimiento del 44 y el 15%. Estos resultados mejoran la calidad de la información porque los agregados destacan la importancia económica del conjunto y los promedios tienen en cuenta diferencias entre atributos comunes de sus componentes. Pero no son consistentes, porque el producto entre las tasas de crecimiento de precios y cantidades supera al aumento en el valor ($1{,}44 \cdot 1{,}15 = 1{,}66 > 1{,}44$). El desarrollo de los números índices apunta a resolver este problema, como trata de mostrar este trabajo.

Cuadro 1
Agregación de cantidades y precios

	Cantidades		**Precios**	
Producto	Período 0	Período 1	Período 0	Período 1
		Datos		
1	$X_1^0 = 30$	$X_1^1 = 60$	$P_1^0 = 5$	$P_1^1 = 4$
2	$X_2^0 = 50$	$X_2^1 = 40$	$P_2^0 = 2$	$P_2^1 = 3$

Agregados simples

$X^0 = X_1^0 + X_2^0 = 30 + 50 = 80$ | $P^0 = P_1^0 + P_2^0 = 5 + 2 = 7\ \$$

$X^1 = X_1^1 + X_2^1 = 60 + 40 = 100$ | $P^1 = P_1^1 + P_2^1 = 4 + 3 = 7\ \$$

$\overline{X^0} = X^0 / n = 100 \ / \ 2 = 40$ | $\overline{P^0} = P^0 / n = 7 / 2 = 3{,}50\ \$$

$\overline{X^1} = X^1 / n = 100 \ / \ 2 = 50$ | $\overline{P^1} = P^1 / n = 7 / 2 = 3{,}50\ \$$

Cambio en las cantidades = $\overline{X^1}/\overline{X^0} = 50 / 40 = 1{,}25$ | Cambio en los precios = $\overline{P^1}/\overline{P^0} = 3{,}50/3{,}50 = 1{,}00$

o también $X_1^1/X_1^0 = 60/30 = 2$; $X_2^1/X_2^0 = 40/50 = 0{,}80$ | o también $P_1^1/P_1^0 = 4/5 = 0{,}80$; $P_2^1/P_2^0 = 3/2 = 1{,}50$

Agregados ponderados

$P^0 \cdot X^0 = P_1^0 \cdot X_1^0 + P_2^0 \cdot X_2^0 = 5 \cdot 30 + 2 \cdot 50 = 250\ \$$

$P^1 \cdot X^1 = P_1^1 \cdot X_1^1 + P_2^1 \cdot X_2^1 = 4 \cdot 60 + 3 \cdot 40 = 360\ \$$

Cambio en el valor = $P^1 \cdot X^1 / P^0 \cdot X^0 = 360 / 250 = 1{,}44$

$\overline{X^0} = P^0 \cdot X^0 / P^0 = 250 / 7 = 35{,}71$ | $\overline{P^0} = P^0 \cdot X^0 / X^0 = 250 / 80 = 3{,}12\ \$$

$\overline{X^1} = P^1 \cdot X^1 / P^1 = 360 / 7 = 51{,}43$ | $\overline{P^1} = P^1 \cdot X^1 / X^1 = 360 / 100 = 3{,}60\ \$$

Cambio en las cantidades = $\overline{X^1}/\overline{X^0} = (51{,}43 / 35{,}71) = 1{,}44$ | Cambio en los precios = $\overline{P^1}/\overline{P^0} = (3{,}60 / 3{,}12) = 1{,}15$

Con esa finalidad se ha organizado de la siguiente manera. En la próxima sección presenta las fórmulas de los números índices que con mayor frecuencia suelen emplearse en la agregación de variables económicas. En la tercera hace un breve repaso de los modelos de optimización en el consumo o la producción, porque tienen una importancia central en la definición de los índices económicos. En las tres siguientes describe los índices económicos de precios y cantidades y algunas relaciones entre ellos. En la séptima comenta las pruebas de Fisher destinadas a comprobar la consistencia de los números índices. En la octava muestra las vinculaciones entre fórmulas de números índices y funciones de preferencia o producción. En la novena introduce índices que miden cambios en la productividad total de los factores, y en la última presenta un resumen y algunos comentarios finales.

FÓRMULAS DE NÚMEROS ÍNDICES TRADICIONALES

Los comentarios anteriores facilitan la presentación de algunos números índices desarrollados dentro del enfoque tradicional, y a comprender sus alcances. Aunque la revisión que se hace es breve, comenzaremos con los **índices de precios** y además lo haremos con el de ***Laspeyres*** porque es el más sencillo y porque su desarrollo facilita el análisis de las características que tienen los otros. Ese índice de precios se obtiene dividiendo el gasto total calculado multiplicando los precios del período 1 por las cantidades del año 0, por el gasto total calculado multiplicando los precios del año 0 por las cantidades de ese mismo período. En otras palabras, se trata de un cociente de gastos calculados con los precios como variables y las cantidades el año base como ponderadores, que suele presentarse como muestra el miembro de la derecha de la primera igualdad de la siguiente expresión:

$$(1) \qquad L(P^1,P^0,X^0)=\frac{\sum_{i=1}^{n} P_i^1 \cdot X_i^0}{\sum_{i=1}^{n} P_i^0 \cdot X_i^0}=\sum_{i=1}^{n}\frac{P_i^1 \cdot X_i^0 \cdot (P_i^0/P_i^0)}{\sum_{i=1}^{n} P_i^0 \cdot X_i^0}=\sum_{i=1}^{n} a_i^0\left(\frac{P_i^1}{P_i^0}\right)$$

en la que P_i^j y X_i^j para i = 1, ... , n y j = 0,1 representan el precio y la cantidad de i – ésimo producto en el j – ésimo período. Si luego se multiplica y divide el numerador de cada término de la suma por P_i^0, se reordenan los factores y se define $a_i^0 = P_i^0 \cdot X_i^0 / \Sigma_i P_i^0 \cdot X_i^0$ como la participación que tiene el gasto en el i – ésimo producto con respecto al total en el período 0, se llega a la expresión final. Esta muestra que el índice de precios de Laspeyres no es otra cosa que la suma de los cambios en los precios de todos los bienes ponderados por la participación que tuvo en el período 0 el gasto realizado en cada uno de ellos dentro del gasto total.

El índice de ***Paasche*** es similar al anterior porque emplea como variables los precios y como ponderadores las cantidades, aunque en este caso las del período 1, como muestra el miembro de la derecha de la primera igualdad siguiente:

$$(2) \qquad P(P^1,P^0,X^1)=\frac{\sum_{i=1}^{n} P_i^1 \cdot X_i^1}{\sum_{i=1}^{n} P_i^0 \cdot X_i^1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{P_i^1 \cdot X_i^1}{\sum_{i=1}^{n} P_i^0 \cdot X_i^1 \cdot (P_i^1/P_i^1)}=1/\left[\sum_{i=1}^{n} a_i^1 \cdot \left(\frac{P_i^0}{P_i^1}\right)\right]$$

y si se multiplica y divide cada término del denominador por P_i^1, se opera y se define luego $a_i^1 = P_i^1 \cdot X_i^1 / \Sigma_i P_i^1 \cdot X_i^1$ se llega al resultado final, que es igual a uno dividido la suma de la inversa de los cambios en los precios ponderados por la participación que tiene el gasto del año 1 realizado en cada uno de ellos con respecto al gasto total.

Pero si se considera que los números índices representan el promedio de un universo de variables que miden cambios en los precios y si el precio de cada bien de un período con relación al del anterior se considera un número aleatorio obtenido en forma independiente de una misma distibución que es aproximadamente normal en los logaritmos de las variables, entonces la media geométrica sería el estadístico maximoverosímil que mejor estima ese promedio[1]. Si se supone que las variables son los cambios en los precios de los bienes entre ambos períodos (P_i^1/P_i^0), las frecuencias el gasto efectuado en cada uno de ellos en el de referencia, vale decir $k_i = P_i^0 \cdot X_i^0$ para i = 1, ... , n, y $k = \Sigma_i^n P_i^0 \cdot X_i^0$, el índice de precios ***Geométrico*** sería:

(3) $$G(P^1,P^0,X^1,X^0)=\sqrt[(\sum_{i=1}^{n}P_i^0X_i^0)]{\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{P_i^1}{P_i^0}\right)^{P_i^0X_i^0}}=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{P_i^1}{P_i^0}\right)^{a_i^0}$$

donde igual que antes $a_i^0 = P_i^0 \cdot X_i^0 / \Sigma_i^n P_i^0 \cdot X_i^0$ es la participación del gasto en el i – ésimo producto con respecto al gasto total del período base. En este caso el índice es una media ponderada de los cambios experimentados por cada componente con los mismos factores de ponderación pero con una función de agregación distinta.

El cuarto índice que se considera aquí es el de ***Tornqvist*,** llamado así en homenaje al economista de ese nombre que lo presentó por primera vez en el año 1936 para medir el “índice de precios del Banco de Finlandia”, y como una aproximación discreta a un índice Divisia contínuo. Para conocer sus características conviene partir de esta identidad:

(4a) $$P \cdot X = P_1 \cdot X_1 + P_2 \cdot X_2 + ... + P_n \cdot X_n$$

donde P y X son índices de precios y cantidades y P_i y X_i los precios y las cantidades de cada uno de los bienes y servicios que componen el grupo.

Diferenciando totalmente esa expresión se obtiene esta otra $dP \cdot X + P \cdot dX = dP_1 \cdot X_1 + P_1 \cdot dX_1 + dP_2 \cdot X_2 + P_2 \cdot dX_2 + ... + dP_n \cdot X_n + P_n \cdot dX_n$ y si luego se dividen ambos miembros por $P \cdot X$, se reordenan los términos del segundo de acuerdo a los cambios en los precios o las cantidades, y finalmente se multiplica y divide cada uno de ellos por el precio y la cantidad respectivamente, se obtiene este otro resultado:

(4b) $$\frac{dP}{P}+\frac{dX}{X}=\sum_{i=1}^{n}s_i \cdot \frac{dP_i}{P_i}+\sum_{i=1}^{n}s_i \cdot \frac{dX_i}{X_i}$$

en el que $s_i = P_i \cdot X_i / \Sigma_i P_i \cdot X_i$ es la participación del gasto realizado en el i – ésimo producto dentro del gasto total. Pero esa expresión en realidad define un par de índices Divisia de precios y cantidades en función de las tasas de crecimiento de sus componentes, pues resulta que $dP / P = \Sigma_i^n s_i \cdot dP_i / P_i$ y $dX / X = \Sigma_i^n s_i \cdot dX_i / X_i$.

Teniendo además en cuenta que $dP_i / P_i = d \ln P_i$, y que este cambio en el logaritmo puede aproximarse haciendo $d \ln P_i = \ln P_i^1 - \ln P_i^0$, Tornqvist propuso la siguiente versión discreta de ese índice de precios Divisia contínuo:

(4) $$T(P^1,P^0,X^1,X^0)=\ln P_1-\ln P_0=\sum_{i=1}^{n}½(s_i^0+s_i^1)\cdot(\ln P_i^1-\ln P_i^0)=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{P_i^1}{P_i^0}\right)^{½\cdot(s_i^0+s_i^1)}$$

siendo $s_i^j = P_i^j \cdot X_i^j / \Sigma_i P_i^j \cdot X_i^j$ para i = 1,..., n y j = 0,1 y donde para llegar a la última expresión se tomaron antilogaritmos teniendo en cuenta que $\ln P_i^1 - \ln P_i^0 = \ln (P_i^1 / \ln P_i^0)$, por ejemplo. Esta versión discreta del índice Divisia coincidirá con la contínua en tanto las participaciones sean constantes. Si esto no ocurre, el error de la aproximación dependerá de la variabilidad de las participaciones y de la longitud del período de tiempo considerado.

Pero la brecha que existe entre los índices de precios de Laspeyres y Paasche, debido a que el primero utiliza como ponderadores las cantidades del período base y el segundo las del corriente, indujo a Irving Fisher a definir en base a ellos otro indicador que se calcula como la media geométrica entre ambos, vale decir:

(5) $$F(P^1,P^0,X^1,X^0)=\sqrt{L(P^1,P^0;X^0)\cdot P(P^1,P^0;X^1)}$$

y que se denomina índice ***ideal de Fisher*** debido a ciertas propiedades deseables que tiene, importantes tanto desde el punto de vista estadístico como del económico.

Los **índices de cantidades** pueden calcularse, por su parte, siguiendo dos enfoques. El primero se denomina *directo*, porque consiste en construír agregados en los que las cantidades son las variables y los precios los ponderadores, obteniéndose en este caso las fórmulas de los índices de cantidades de Laspeyres, Paasche, Geométrico, de Tornqvist y de Fisher, similares a las anteriores. El segundo se llama *indirecto*, porque se obtiene dividiendo el índice que mide los cambios en el valor entre ambos períodos por el índice de precios, vale decir haciendo:

$$Q(X^1,X^0,P^1,P^0)=\frac{V(P^1,X^1,P^0,X^0)}{P(P^1,P^0;X^1,X^0)}=\frac{\sum_{i=1}^{n}P_i^1\cdot X_i^1/\sum_{i=1}^{n}P_i^0\cdot X_i^0}{P(P^1,P^0;X^1,X^0)}$$

Empleando este enfoque se comprueba que el índice de cantidades de Pasche puede calcularse dividiendo el índice de valor con el índice de precios de Laspeyres, lo que lleva a decir que estos indicadores son *duales* entre sí. Con esta denominación se quiere indicar que el producto entre ellos proporciona el índice de valor, o también que con esos dos índices es posible descomponer en forma exacta el cambio en el gasto total entre dos períodos. Por las mismas razones, los índices de cantidades de Laspeyres y de precios de Paasche también son duales entre sí. Sin embargo, ninguno de esos pares de índices logra el mismo resultado, porque si se divide el índice de valor por el de precios de Laspeyres no se obtiene el de cantidades correspondiente, y lo mismo ocurre con los de Paasche. Esta es una de las razones que llevaron a llamar ideal al índice de Fisher. Esta propiedad se denomina “reversión de factores” y es una de las que aseguran la consistencia de los índices, como se verá más adelante. Además, por este motivo se dice que tienen *dualidad propia*.

Los índices de cantidades que se presentan a continuación corresponden a los de precios comentados antes y se obtuvieron empleando el enfoque directo. En todos los casos se calculan igual que aquellos, aunque ahora las variables son las cantidades. Esto se aprecia claramente en el de Laspeyres, por ejemplo, porque es un promedio de las tasas de crecimiento de las cantidades ponderadas por la participación del gasto realizado en cada producto, vale decir:

(1’) $$L(X^1,X^0,P^0)=\frac{\sum_{i=1}^{n}P_i^0\cdot X_i^1}{\sum_{i=1}^{n}P_i^0\cdot X_i^0}=\sum_{i=1}^{n}\frac{P_i^0\cdot X_i^1\cdot(X_i^0/X_i^0)}{\sum_{i=1}^{n}P_i^0\cdot X_i^0}=\sum_{i=1}^{n}a_i^0\left(\frac{X_i^1}{X_i^0}\right)$$

El índice de cantidades de Paasche resulta a su vez igual a:

(2’) $$P(X^1,X^0,P^1)=\frac{\sum_{i=1}^{n}P_i^1\cdot X_i^1}{\sum_{i=1}^{n}P_i^1\cdot X_i^0}=\sum_{i=1}^{n}\frac{P_i^1\cdot X_i^1}{\sum_{i=1}^{n}P_i^1\cdot X_i^0\cdot(X_i^1/X_i^1)}=1/\left[\sum_{i=1}^{n}a_i^1\cdot\left(\frac{X_i^0}{X_i^1}\right)\right]$$

El indice de cantidades Geométrico se expresa formalmente así:

$$(3') \qquad G(X^1,X^0,P^1,P^0)=\sqrt[(\sum_{i=1}^{n}P_i^0X_i^0)]{\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i^1}{X_i^0}\right)^{P_i^0X_i^0}}=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i^1}{X_i^0}\right)^{a_i}$$

El índice de cantidades de Tornqvist tiene esta especificación:

$$(4') \qquad T(X^1,X^0,P^1,P^0)=\ln X_1-\ln X_0=\sum_{i=1}^{n}½(s_i^0+s_i^1)\cdot(\ln X_i^1-\ln X_i^0)=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i^1}{X_i^0}\right)^{½\cdot(s_i^0+s_i^1)}$$

Finalmente, el indice de cantidades ideal de Fisher resulta:

$$(5') \qquad F(X^1,X^0,P^1,P^0)=\sqrt{L(X^1,X^0;P^0)\cdot P(X^1,X^0;P^1)}$$

Para apreciar mejor las características de esos índices, en el Cuadro 2 se presentan los resultados obtenidos calculándolos con los datos del ejemplo anterior. Empezando por el final, allí se aprecia que los índices ideales de Fisher resultan $F(P^1, P^0, X^1, X^0) = 1{,}012$ y $F(X^1, X^0, P^0, P^1) = 1{,}424$, lo que indica que los precios aumentaron el 1,2% y las cantidades el 42,4%; además, como tienen dualidad propia, el producto entre ellos es igual a la evolución del gasto total, como se verifica observando que $F(P^1, P^0, X^1, X^0)\cdot F(X^1, X^0, P^0, P^1) = 1{,}012\cdot 1{,}424 = 1{,}44$. Si se supone que los índices ideales de Fisher son los que mejor expresan los cambios en esos agregados económicos, los resultados también sugieren que los que más se les aproximan son los de Tornqvist pues acusan aumentos de 0,7% en los precios, 42,9% en las cantidades y 44% en el valor, mientras que en el extremo opuesto se encuentran los de Laspeyres con aumentos del 8%, 52% y 64,2%, respectivamente,

Lo cierto es que la línea que separa el avance del enfoque tradicional con los desarrollos que ahora constituyen parte de la teoría económica de los números índices no es nítida. Esto se debe a que ya en 1924 el economista ruso Konus (1924) definió un "índice de costo de vida de utilidad constante" como el cociente entre los gastos mínimos que corresponden a dos situaciones de equilibrio en el consumo con precios distintos y para el mismo nivel de utilidad. Un par de años después Konus y Byushgens (citados por Diewert, 1976) comprobaron que el índice de cantidades Geométrico deriva de una función de agregación de tipo Cobb Douglas. Wald (1939) demostró a su vez que cuando la función de preferencias es cuadrática, el índice de cantidades ideal de Fisher puede emplearse para calcular el agregado $Q = F(X) = (X_i^T\cdot A\cdot X_i)^{½}$ sin necesidad de estimar los coeficientes de la matriz A, por ejemplo. También Solow (1956), en un trabajo notable que se inscribe dentro de la célebre "controversia de Cambridge" desatada por críticas a la teoría neoclásica que sostenían la imposibilidad de medir el capital en base a la opinión de que sus componentes no podían sumarse, demostró que cuando la función de agregación es homotética los distintos insumos pueden agregarse de una manera exacta y consistente.

Cuadro 2
Indices de precios, cantidades y valor

Indices de precios $P(P^1,P^0;X)$	Indices de cantidades $Q(X^1,X^0,P)$	Indices de valor $(P\cdot Q)$
$L=\sum_{i=1}^{n} b_i^0\cdot(\frac{P_i^1}{P_i^0})=0{,}60\cdot(\frac{4}{5})+0{,}40\cdot(\frac{3}{2})=1{,}080$	$L=\sum_{i=1}^{n} b_i^0\cdot(\frac{X_i^1}{X_i^0})=0{,}60\cdot(\frac{50}{30})+0{,}40\cdot(\frac{40}{60})=1{,}520$	1,642
$P=1/[\sum_{i=1}^{n} b_i^1\cdot(\frac{P_i^0}{P_i^1})]=1/[0{,}67\cdot(\frac{5}{4})+0{,}33\cdot(\frac{2}{3})]=0{,}947$	$P=1/[\sum_{i=1}^{n} b_i^1\cdot(\frac{X_i^1}{X_i^0})]=1/[0{,}67\cdot(\frac{30}{50})+0{,}33\cdot(\frac{60}{40})]=1{,}333$	1,263
$G=\prod_{i=1}^{n}(\frac{P_i^1}{P_i^0})^{a_i}=(\frac{4}{5})^{0{,}60}\cdot(\frac{3}{2})^{0{,}40}=1{,}029$	$G=\prod_{i=1}^{n}(\frac{X_i^1}{X_i^0})^{a_i}=(\frac{50}{30})^{0{,}60}\cdot(\frac{40}{60})^{0{,}40}=1{,}386$	1,426
$T=\prod_{i=1}^{n}(\frac{P_i^1}{P_i^0})^{\frac{(s_i^0+s_i^1)}{2}}=(\frac{4}{5})^{\frac{0{,}6+0{,}67}{2}}(\frac{3}{2})^{\frac{0{,}4+0{,}33}{2}}=1{,}007$	$T=\prod_{i=1}^{n}(\frac{X_i^1}{X_i^0})^{\frac{(s_i^0+s_i^1)}{2}}=(\frac{50}{30})^{\frac{0{,}6+0{,}67}{2}}(\frac{40}{60})^{\frac{0{,}4+0{,}33}{2}}=1{,}429$	1,440
$F=[(\frac{P^1\cdot X^0}{P^0\cdot X^0})\cdot(\frac{P^1\cdot X^1}{P^0\cdot X^1})]^{1/2}=(1{,}080\cdot 0{,}947)^{½}=1{,}012$	$F=[(\frac{P^1\cdot X^0}{P^0\cdot X^0})\cdot(\frac{P^1\cdot X^1}{P^0\cdot X^1})]^{1/2}=(1{,}520\cdot 1{,}333)^{½}=1{,}424$	1,440

Estos son algunos de los trabajos pioneros que constituyen el punto de partida de la moderna teoría económica de los números índices, también llamada *funcional* porque los indicadores se obtienen empleando modelos de optimización en el consumo o la producción basados en funciones de agregación de precios o de cantidades. Además, entre estas funciones y las fórmulas de números índices existen relaciones precisas en el sentido de que cada función de agregación tiene asociada una determinada fórmula de números índices y viceversa, como de verá más adelante. Esto es comprensible, porque las posiciones de equilibrio de individuos o empresas corresponden a puntos de funciones de preferencia, producción o gasto que a su vez representan agregados de productos, insumos o precios. Aunque las contribuciones al desarrollo de la teoría económica de los números índices en las últimas décadas fueron numerosas, esta síntesis se basa en los trabajos de Malmquist (1953), Samuelson y Swamy (1974), Diewert (1976), Caves, Christensen y Diewert (1982) y Fare y Grosskopf (1996), porque nos parecen los más relevantes.

EQUILIBRIO EN EL CONSUMO Y LA PRODUCCIÓN

Como los índices económicos miden cambios en el consumo o la producción y por consiguiente se basan en los precios y las cantidades correspondientes a dos posiciones de equilibrio del consumidor o el productor, un breve repaso de esas condiciones facilitará su estudio. Aunque por razones de simplificación en los desarrollos que siguen nos referiremos a la conducta de los consumidores, los que describen el comportamiento de los productores en materia de asignación óptima del gasto destinado a la compra de insumos son similares. Esos modelos en general suponen que el individuo tiene un orden de preferencias que satisface las condiciones de continuidad, monotonicidad y cuasiconcavidad y que su objetivo es maximizar la utilidad que puede alcanzar asignando su ingreso monetario limitado a la compra de un conjunto determinado de bienes, a precios dados. Este problema se simboliza así:

$$(6) \qquad V(P, M^0) = Max_X \{ U(X) \mid P \cdot X = M^0; \forall X \geq 0 \} = X(P, M^0)$$

donde U = U(X) es una función de utilidad contínua que representa ese orden de preferencias, $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vector que contiene los bienes y servicios disponibles, $P = (P_1, \dots, P_n)$ el vector de precios de esos productos y M^0 el ingreso monetario. La solución de ese problema proporciona las funciones de demanda ordinarias o Marshallianas, expresadas en función de los precios y el ingreso monetario, y representadas por el vector $X = X(P, M^0)$. Si esas funciones se reemplazan luego en la función objetivo se obtiene la función de utilidad indirecta $V(P, M^0)$.

Pero este problema puede también analizarse desde un punto de vista *dual*, que supone que el individuo selecciona la combinación de bienes que minimiza el gasto que tiene que afrontar para alcanzar un determinado nivel de utilidad, en cuyo caso resulta:

$$(7) \qquad e(P, U^0) = Min_P \{PX \mid U(X) \geq U^0; \forall X \geq 0 \} = X(P, U^0) \cdot P$$

donde U(X) y P satisfacen las condiciones antes expuestas, $X = X(P; U^0)$ es el vector de demandas compensadas o Hicksianas y $e(P;U^0)$ la *función directa de gasto* del consumidor. Un instrumento menos conocido pero muy importante es la *función indirecta de gasto*, que se obtiene resolviendo el problema de minimización del gasto necesario para alcanzar un cierto bienestar pero en el espacio de los precios, y se plantea así:

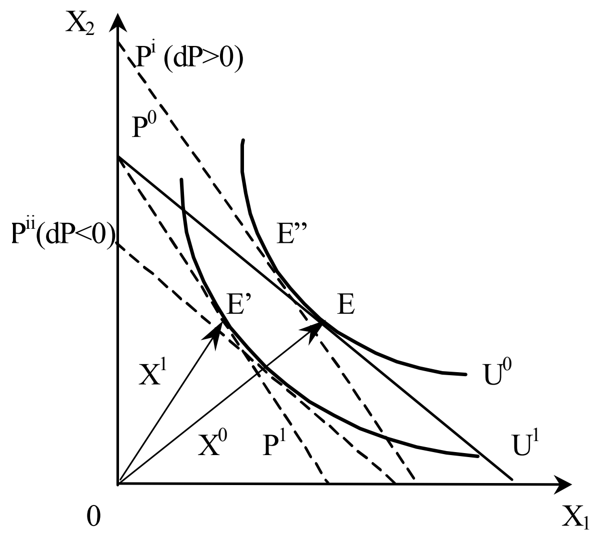
$$(8) \qquad F(X, U^0) = Min_X \{PX \mid V(P,M) \leq U^0; \forall P > 0 \} = P(X, U^0) \cdot X.$$

La solución proporciona las funciones indirectas de demanda compensadas $P = P(X, U^0)$ que determinan los *precios sombra* correspondientes al proceso de optimización *primal* (6). Por lo tanto, la expresión anterior puede considerarse el costo mínimo de una combinación de bienes valuados a sus precios sombra que proporciona una utilidad U^0. Estos procesos de optimización se desarrollan en el Apéndice empleando una función del tipo Cobb Douglas bajo el supuesto de que sólo existen dos bienes.

Además, el equilibrio del consumidor en el caso de dos productos se muestra gráficamente en la Figura 1, donde la curva de indiferencia $U^0 = U(X_1, X_2)$ representa sus preferencias y la línea $P^0 = (P_1^0, P_2^0)$ su ecuación de balance[2]. Las coordenadas del punto E de tangencia entre ambas, o el vector $X^0 = (X_1^0, X_2^0)$, constituyen la solución del problema de optimización e indican que la mejor elección sería comprar X_1^0 unidades del primer bien y X_2^0 del segundo (que no se señalan en el gráfico por razones de simplificación), tanto si se quiere *maximizar la utilidad* que es posible obtener con un ingreso M^0 como si se quiere *minimizar el gasto* que permite alcanzar una utilidad U^0. Si el precio del bien 1 aumentara, la recta de balance P^0 se desplazaría como muestra la línea discontínua P^1 y el equilibrio del consumidor se movería al punto E', que implica un menor bienestar porque corresponde a la curva de indiferencia U^1 que está por debajo de la anterior. En estas nuevas condiciones de precios la combinación óptima de bienes muestra una reducción en las compras del que ahora es relativamente más caro. Si el precio bajara en lugar de subir la recta P^1 representaría la ecuación de balance inicial y P^0 la final, el equilibrio estaría en E' y la caída en el precio lo desplazaría al E (los superíndices se refieren a los períodos).

Los desplazamientos del equilibrio obedecen a variaciones en los precios relativos y el ingreso real y pueden descomponerse en dos movimientos. El cambio en el consumo inducido por el aumento en el precio del bien 1 mientras el del 2 y el ingreso monetario se mantienen puede medirse "imaginando" que se otorga al consumidor una compensación monetaria para que en la nueva situación de precios pueda mantener el bienestar anterior. Esto haría desplazar su restricción presupuestaria hacia arriba como muestra la recta P^i hasta que haga tangencia con U^0 en el punto E", cuyas coordenadas determinan las cantidades de equilibrio correspondientes a la nueva relación de precios. Si el equilibrio inicial estuviera en el punto E' y el precio del primer bien disminuyera en lugar de aumentar, las líneas P^1 y P^0 representarían ahora las restricciones presupuestarias inicial y final y el equilibrio se desplazaría al E; en este caso, para que el consumidor mantenga el bienestar U^1 sería necesario "quitarle" parte de su ingreso de modo que la restricción presupuestaria imaginaria representada por la recta P^{ii} lo lleve a la posición de equilibrio final en el punto de tangencia con la nueva curva de indiferencia.[3]

Figura 1
Equilibrio del consumidor en el espacio de bienes

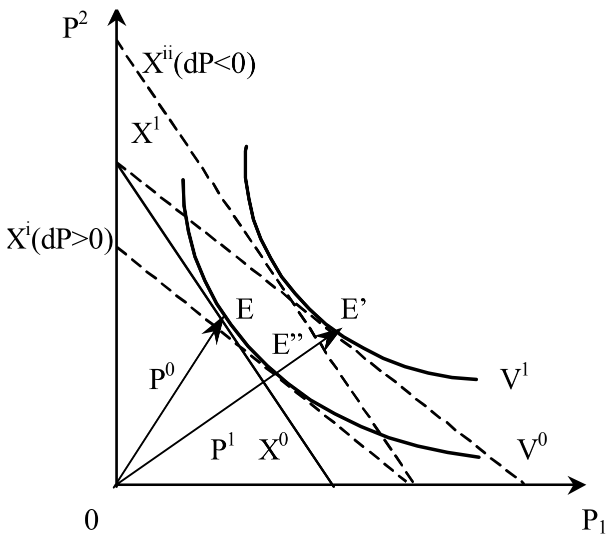


En la Figura 2 se presenta también el equilibrio del consumidor, pero en el espacio de los precios. La curva de indiferencia inicial $V^0 = V(P^0, M^0)$, que corresponde a una función de utilidad indirecta que proviene del proceso de optimización (6) como se muestra con más detalle en el Apéndice expresa sus preferencias, mientras que la línea $X^0 = (X_1^0, X_2^0)$ representa ahora su restricción presupuestaria. Las coordenadas del punto de tangencia E entre ambas indican la solución de los problemas de optimización presentados antes, aunque en este caso sus coordenadas expresan los precios P_1^0 y P_2^0 con los que se *maximiza el bienestar* cuando se tiene un ingreso M^0 o se *minimiza el gasto* que permite alcanzar un nivel de utilidad V^0.

El aumento en el precio del bien uno rotaría la línea de presupuesto X^0 a la posición de la de trazo discontínuo X^1 y desplazaría el equilibrio al punto E' provocando una caída en el bienestar, porque el consumidor se ubicaría ahora sobre una curva de indiferencia indirecta más alejada del origen. Por consiguiente, para que mantenga el bienestar inicial en esta nueva situación de precios sería necesario otorgarle una compensación monetaria que desplace su recta de balance hacia abajo hasta que haga tangencia con V^0 en el punto E", como muestra la línea imaginaria X^i. Si el precio de ese bien bajara en lugar de aumentar, la línea punteada X^1 representaría la restricción presupuestaria inicial y X^0 la final, y en la situación de equilibrio inicial señalada ahora por el punto E' disfrutaría un nivel de utilidad V^1. Como esa caída en el precio desplazaría el equilibrio al punto E, para que mantenga el bienestar anterior habría que "quitarle" parte de su ingreso de modo que llegue a la posición de equilibrio final que corresponde al punto de tangencia entre V^1 y la restricción presupuestaria imaginaría X^{ii}.

Figura 2

Equilibrio del consumidor en el espacio de precios



Esta revisión apunta a destacar las relaciones que existen entre posiciones de equilibrio y funciones de gasto, que como se verá son muy importantes para definir los índices económicos. Con ayuda de la Figura 1 es posible apreciar que el gasto mínimo correspondiente a la posición de equilibrio inicial E con precios P^0 y nivel de bienestar U^0 se puede calcular con la función indirecta de gasto $F(X^0, U^0)$ y el asociado con el imaginario E" con $F(X^1, U^0)$. De igual modo, la función directa de gasto que corresponde al equilibrio inicial E es $e(P^0, U^0)$, la asociada con el final E' esta otra $e(P^1, U^1)$, y la del punto E" $e(P^1, U^0)$. Además, esos gastos mínimos son iguales a los ingresos correspondientes a las ecuaciones de balance P^0, P^1 y P^i, tangentes a las curvas de indiferencia U^0 y U^1 en los puntos E y E' y E". La Figura 2 muestra esas mismas relaciones, aunque en ella los gastos mínimos equivalen a los niveles de ingreso correspondientes a las ecuaciones de balance X^0, X^1 y X^i, respectivamente.[4]

ÍNDICE ECONÓMICO DE PRECIOS

Es fácil comprender ahora el significado del índice económico de precios, que se define como la relación entre los gastos mínimos necesarios para mantener un nivel de bienestar determinado en dos situaciones de precios distintas, y se calcula así:

$$P\left(P^1, P^0, U^0\right) = \frac{e(P^1, U^0)}{e(P^0, U^0)} \quad (9)$$

donde $U^0 = f(X^0)$ es el nivel de utilidad seleccionado como punto de referencia, $X^0 = (X_1^0, \ldots, X_n^0)$ el vector de cantidades de la situación inicial y $P^0 = (P_1^0, \ldots, P_n^0)$ y $P^1 = (P_1^1, \ldots, P_n^1)$ los vectores de precios de los períodos inicial y final respectivamente.

Este es un *índice del costo de vida* que depende de los precios de los productos en los períodos 0 y 1 y del nivel de bienestar o actividad en el primero de ellos, seleccionado como punto de referencia para la comparación. Como se aprecia, puede calcularse en forma inmediata empleando las funciones directas de gasto porque éstas proporcionan los gastos mínimos necesarios para mantener el bienestar constante en dos situaciones de precios distintas. El numerador mide el gasto de la posición de equilibrio final y el denominador el correspondiente a la inicial. Además, como la función de gasto es no decreciente en P y creciente en U si éstos suben el bienestar sólo puede mantenerse aumentando el gasto, lo que significa $e(P^1, U^0) > e(P^0, U^0)$ y por consiguiente el índice es mayor que uno. Cuando los precios bajan ocurre lo contrario.

En la Figura 1 se puede apreciar que este índice mide el desplazamiento del equilibrio del punto E al E"provocado por el cambio en los precios, pues es igual al cociente entre el gasto mínimo $e(P^1, U^0)$ correspondiente al equilibrio "imaginario" del punto E" luego de que el aumento en el precio del primer bien es compensado por un aumento en el ingreso monetario suficiente para mantener el bienestar inicial U^0 y $e(P^0, U^0)$, que corresponde a la posición de equilibrio inicial E cuando los precios son P^0 y la utilidad U^0. En la Figura 2 esas expresiones están asociadas con los puntos E" y E que se encuentran sobre la curva de indiferencia V^0. En otras palabras, el índice económico de precios mide el aumento en el gasto del consumidor que es necesario para que pueda mantener su bienestar inicial en la nueva situación de precios. Por consiguiente, también es igual a la relación entre los niveles de ingreso representados por las rectas de balance P^i y P^0 en el primer caso y X^i y X^0 en el segundo que corresponden a las posiciones de equilibrio imaginario E" e inicial E, respectivamente.

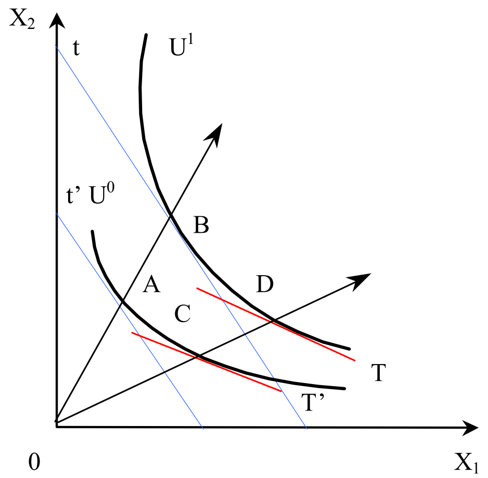
Pero como los índices económicos de precios no son independientes del nivel de utilidad de referencia porque U^0 es un argumento de la funcion de gasto mínimo, pueden tomar diferentes valores para cambios idénticos en los precios y por este motivo se dice que no son invariantes. Sólo tienen esta característica cuando la *función de agregación es homotética*, porque en este caso su valor sólo dependerá de los precios o cantidades iniciales y no de los niveles de bienestar. Una función homotética es una transformación monótonamente creciente de una función homogénea de primer grado, del tipo $F[f(X)]$ tal que $F[0] = 0$ y $F[X] \to \infty$ en tanto $X \to \infty$ [5]. Cuando la función de preferencias es homotética en la de gasto mínimo que se obtiene a partir de ella es posible separar los precios de los niveles de utilidad, en cuyo caso resulta que $e(P, U^0) = F^{-1} \cdot U^0 \cdot e(P)$. Diewert (1976) ha demostrado que ese es el resultado del proceso de optimización que se presenta ahora así: $e(P, U^0) = \text{Min}\{PX \mid F[f(X)] \geq U^0;\ X \geq 0\} = \text{Min}\{PX \mid f(X) \geq F^{-1} \cdot U^0;\ X \geq 0\} = \text{Min}\{PX \mid f[X / F^{-1} \cdot U^0] \geq 1;\ X \geq 0\} = F^{-1} \cdot U^0 \cdot \text{Min}\{PZ \mid f(Z) \geq 1;\ Z \geq 0\}$. Empleando este resultado el índice de precios calculado empleando la expresión (9) sería ahora:

$$(9') \qquad P\left(P^1,P^0,U^0\right)=P\left(P^1,P^0,U^1\right)=P\left(P^1,P^0\right)=\frac{e(P^1)}{e(P^0)}$$

que es homotético, pues es independiente del nivel de utilidad de referencia.

Figura 3

Funciones de agregación no homotéticas



En la Figura 3 se presentan dos curvas de indiferencia correspondientes a una función de preferencias no homotética. Los puntos A y B señalan posiciones de equilibrio para la misma situación de precios representada por la pendiente de las rectas t y t' que son tangentes a las curvas U^1 y U^0 respectivamente, mientras que los puntos C y D muestran otras dos situaciones de equilibrio para precios como los representados por las pendientes de T y T'. Además, el gráfico se ha dibujado de modo que el segmento AB sea igual al OA y el CD la mitad del OC. En estas condiciones es fácil comprobar que si el equilibrio inicial del punto A de la curva U^0 se desplazara al B que se encuentra sobre la U^1, el índice de cantidades se elevaría de 1 en A a 2 en B, porque el gasto mínimo asociado con la línea t igual a $e(P^0, U^1)$ duplica al de la t', que es $e(P^0, U^0)$. Pero si el equilibrio inicial estuviera en C y se moviera a D, el cambio en el bienestar sería el mismo porque aquí también el consumidor pasa de la curva de indiferencia U^0 a la U^1 pero el valor del índice igual a 1 en la situación inicial C se elevaría a 1,50 en la final D. En otras palabras, si el equilibrio pasa de A a B el índice es 2 pero si el movimiento fuera ACDB alcanzará un valor igual a 1,5.

INDICE ECONÓMICO DE CANTIDADES

El índice económico de cantidades puede definirse empleando funciones de gasto o funciones distancia. Basándose en el enfoque que emplea ***funciones directas***

de gasto Samuelson y Swamy (1974) lo definen como la relación entre los gastos mínimos necesarios para alcanzar dos niveles de bienestar distintos en una misma situación de precios, vale decir:

$$(10) \qquad Q\left(X^1, X^0, P^1\right) = \frac{e(P^1, U^1)}{e(P^1, U^0)}$$

donde las funciones y las variables tienen el mismo significado que antes.

Este es un *índice de nivel de vida* que depende de los precios del año 1 seleccionado como punto de referencia y del bienestar de los períodos 0 y 1. Lo mismo que el anterior se calcula en foma inmediata empleando las funciones directas de gasto porque éstas proporcionan los gastos mínimos que en la misma situación de precios permiten alcanzar dos niveles de bienestar diferentes. El numerador mide el gasto de la posición de equilibrio final y el denominador el correspondiente a la inicial. Además, como la función de gasto es no decreciente en P y creciente en U si los precios se mantienen luego de haber subido desplazando al consumidor a una curva de indiferencia inferior, resulta que $e(P^1, U^1) < e(P^1, U^0)$ y por consiguiente el índice es menor que uno. Cuando los precios bajan ocurre lo contrario.

En la Figura 1 se puede apreciar que mide el desplazamiento entre los puntos de equilibrio E' y E" provocado por un cambio en los precios. Además, es igual al cociente entre $e(P^1, U^1)$, que es el gasto mínimo correspondiente a la situación de equilibrio final E' cuando la utilidad es U^1 y los precios P^1 y $e(P^1, U^0)$, que corresponde al equilibrio "imaginario" del punto E" donde los precios también son P^1 porque la restricción económica está representada por la recta P^i, pero el bienestar es ahora U^0. El mismo análisis puede hacerse en el espacio de los precios con ayuda de la Figura 2. Esto significa que el índice económico de cantidades mide el cambio en el gasto del consumidor asociado con dos niveles de bienestar distintos en la misma situación de precios. Por estas razones también puede interpretarse como el cociente entre el ingreso correspondiente a las rectas de balance P^1 y P^i en el primer caso y X^1 y X^i en el segundo, que corresponden a esas posiciones de equilibrio final E' e imaginario E".[6]

Estos resultados junto a los anteriores muestran que el cambio en el equilibrio del consumidor desde los puntos E a E' de la Figura 1 puede descomponerse empleando un índice de precios y otro de cantidades. El índice de precios o de costo de vida mide el movimiento de E a E " relacionando los gastos mínimos que le permiten mantener el mismo bienestar en dos situaciones de precios distintas, representados por $e(P^1, U^0)$ y $e(P^0, U^0)$. En otras palabras, indica en cuanto tendría que aumentar su ingreso para que a los nuevos precios P^1 pueda mantener la utilidad inicial U^0. El índice de cantidades o de nivel de vida mide a su vez el movimiento desde E" a E' empleando también funciones de gasto, pero relacionando en este caso las correspondientes a los niveles de utilidad final e inicial valoradas a los precios iniciales, que en este caso resultan $e(P^0, U^1)$ y $e(P^0, U^0)$. Se obtiene de este modo el valor monetario de la caída en el nivel de vida que está asociado con el desplazamiento del equilibrio desde la curva de indiferencia U^0 a la U^1 (que representa un menor nivel de utilidad).

Pero de acuerdo a lo que comentamos en el caso del índice de precios, cuando la *función de preferencias es homotética* la de gasto mínimo que se deriva de ella puede separarse en precios y niveles de utilidad, en cuyo caso el índice de cantidades calculado empleando las funciones directas de gasto mínimo tiene esta especificación:

$$(10') \qquad Q\left(X^1, X^0, P^0\right) = Q\left(X^1, X^0, P^1\right) = Q\left(X^1, X^0\right) = \frac{f(X^1)}{f(X^0)}$$

y un resultado similar se obtiene cuando se emplean las funciones indirectas de gasto.

El índice económico de cantidades calculado empleando ***funciones indirectas de gasto*** se define a su vez como la relación entre los gastos mínimos necesarios para comprar dos combinaciones de bienes distintas que permiten mantener el mismo nivel de utilidad, y se presenta así:

$$Q\left(X^1, X^0, U^0\right) = \frac{F(X^1, U^0)}{F(X^0, U^0)} \tag{11}$$

donde X^1 y X^0 son los vectores de cantidades y U^0 la curva de indiferencia de referencia de la Figura 1. Pero aquí también se aprecia que el numerador equivale al ingreso monetario correspondiente a la recta de balance P^i, que es tangente a la curva de indiferencia U^0 en el punto E", cuyas coordenadas definen un vector de bienes X^2. El denominador, por su parte, es igual al ingreso monetario de la recta de balance final representada por P^1 que es tangente a la curva de indiferencia U^1 en el punto E' y está a su vez asociado con el vector X^1.

El índice de cantidades calculado siguiendo el enfoque que emplea ***funciones distancia*** suele denominarse de Malmquist, en homenaje al economista que sugirió estimarlo de ese modo. En este caso el impacto que provoca el desplazamiento del equilibrio del punto E al E' en la Figura 1 se mide relacionando las funciones distancia correspondientes a los vectores de cantidades X^0 y X^1 y el nivel de utilidad de referencia U^0. El índice de cantidades referido a los insumos se define así:

$$Q_i(X^1, X^0, U^0) = \frac{D_i(X^1, U^0)}{D_i(X^0, U^0)} = D_i(X^1, U^0) = \rho \tag{12}$$

porque la función distancia D_i $(X^1, U^0) = \rho = X^1 / X^2 < 1$ proporciona el factor con el que debe deflactarse X^1 para colocarlo sobre la curva de indiferencia U^0 en el punto de equilibrio imaginario E", donde el vector de cantidades óptimas sería X^2, y porque D_i $(X^0, U^0) = \rho = X^0 / X^0 = 1$, debido a que el vector X^0 se encuentra sobre la curva de indiferencia de referencia. La función distancia se comenta en el Apéndice.

ÍNDICES ECONÓMICOS, FUNCIONES DE GASTO Y FUNCIONES DISTANCIA

Una ampliación de este análisis permite comprobar algunas características de las funciones de gasto y de los índices económicos, y sus relaciones. En Blackorby, Primont y Russell (1978) se demuestra que *la función directa de gasto es una función distancia* que también puede obtenerse a partir del siguiente proceso de optimización:

$$e(P, U) = \text{Max}_\rho \ \{ \rho \ \mid V(P / \rho) \ \leq U^0 \ \forall \ \rho \ > \ 0\} = \rho$$

lo que en otras palabras significa que la función de gasto derivada de la función de utilidad directa puede interpretarse también como una función distancia obtenida a partir de la función de utilidad indirecta. Esa construcción permite comprobar que si $V(P / \rho)$ es mayor, menor o igual a U^0, luego $e[(P / \rho), U^0]$ es mayor, menor o igual a 1.

Pero la función indirecta de gasto puede obtenerse alternativamente así:

$$F(X, U) = Max_\rho \ \{ \rho \ \mid U(X / \rho) \geq U^0 \ \forall \ \rho \ > \ 0\} = \rho$$

lo que sugiere que en este caso la función indirecta de gasto que deriva de la función de utilidad indirecta puede interpretarse como una función distancia calculada a partir de la función de utilidad directa. Lo mismo que antes, a partir de esta presentación es evidente que si $U(X / \rho)$ es mayor, igual o menor que U^0, luego $F[(X /\rho); U]$ es a su vez mayor, igual o menor que 1.

En ese mismo trabajo también se demuestra que *la función indirecta de gasto es la recíproca de la función directa de gasto*, una relación que puede presentarse así:

(13) $$F(X, U) = 1 / e(P, U).$$

y que es muy importante porque permite comprobar que los índices de cantidades definidos empleando las funciones directas de gasto son iguales a los calculados con las funciones indirectas. Para hacerlo, conviene presentar el índice económico de cantidades (11) como muestra el miembro de la derecha de la expresión siguiente:

(14) $$Q(X^1,X^0,U^0) = \frac{F(X^1,U^0)}{F(X^0,U^0)} \cdot \frac{F(X^0,U^0)}{F(X^1,U^1)} = \frac{1/e(P^1,U^0)}{1/e(P^1,U^1)} = \frac{e(P^1,U^1)}{e(P^1,U^0)} = Q(X^1,X^0,P^1)$$

donde el segundo factor es 1 debido a que $F(X^0; U^0) = F(X^1; U^1) = 1$ pues ambas son funciones distancia con vectores de cantidades X^0 y X^1 ubicados sobre las curvas U^0 y U^1. Simplificando, reemplazando por (13) y operando se obtiene el último resultado.

De un modo similar puede comprobarse que *los índices económicos de precios y de cantidades definidos empleando funciones de gasto son funciones distancia*. Para demostrarlo con respecto al índice de precios conviene regresar a la Figura 2 y tener en cuenta que cuando aumenta el precio del primer bien el equilibrio se desplaza de E a E' y ubica al consumidor en la curva V^1 que representa una utilidad menor. Por consiguiente, para mantener su bienestar al nivel inicial $V^0 = U^0$ debiera recibir una compensación monetaria que mueva su ecuación de balance como muestra la línea X^{ii} a fin de que pueda ubicarse en el equilibrio imaginario E". El índice económico de precios (10) puede presentarse como la primera igualdad de la expresión siguiente:

(10") $$P(P^1,P^0,U^0) = \frac{e(P^1,U^0)}{e(P^0,U^0)} \cdot \frac{e(P^2,U^0)}{e(P^1,U^0)} = \frac{e(P^2,U^0)}{e[(P^2/\rho),U^0]} = \frac{e(P^2,U^0)}{e(P^2,U^0)/\rho} = \rho$$

El segundo factor es igual a 1 debido a que $e(P^2; U^0) = e(P^1; U^0) = 1$, pues ambas son funciones distancia con vectores de precios P^2 y P^1 ubicados sobre la curva de indiferencia V^0. Simplificando, dividiendo luego el vector P^0 por la función distancia de modo que alcance el punto de equilibrio imaginario E" ubicado sobre la curva de indiferencia inicial V^0, vale decir haciendo $P^0 = P^2 / \rho$ y reemplazando en la función de gasto, se obtiene el miembro de la derecha de la segunda igualdad. Finalmente, la homogeneidad lineal en precios de la función de gasto permite extraer ρ obteniéndose el resultado que muestra la última igualdad. Pero este mismo resultado se podría haber alcanzado de un modo más directo, porque de acuerdo a las propiedades de la función distancia resulta que $e(P^0, U^0) = 1$ y $e(P^1, U^0) = \rho = P^2 / P^1$.

En el caso del índice de cantidades la demostración es similar. Con ayuda de la Figura 1 se comprueba que el aumento en el precio del primer bien desplaza el equilibrio del consumidor del punto E al E' y reduce su bienestar, porque lo traslada a una curva de indiferencia más baja. Eso significa que para mantener su utilidad al nivel inicial U^0 debiera recibir una compensación monetaria que mueva su ecuación de balance como muestra la línea P^i a fin de que pueda ubicarse en el equilibrio imaginario E". El índice económico de cantidades (11) puede, en este caso, presentarse como la primera igualdad de la expresión siguiente:

$$(11') \qquad Q\left(X^1,X^0,U^0\right)=\frac{F(X^1,U^0)}{F(X^0,U^0)}\cdot\frac{F(X^0,U^0)}{F(X^2,U^0)}=\frac{F(X^1,U^0)}{F[(X^1/\rho),U^0]}=\frac{F(X^1,U^0)}{F(X^1,U^0)/\rho}=\rho$$

donde lo mismo que antes, el segundo factor del miembro de la derecha es 1 debido a que $F(X^0; U^0) = F(X^2; U^0) = 1$, pues ambas son funciones distancia con vectores de precios X^0 y X^2 ubicados sobre la curva de indiferencia U^0. Simplificando y dividiendo luego el vector X^1 por la función distancia de modo que alcance el punto de equilibrio imaginario E" que se encuentra en U^0, vale decir haciendo $X^2 = X^1 / \rho$ y reemplazando en la función de gasto, se obtiene el miembro de la derecha de la segunda igualdad. Además, como la función indirecta de gasto es homogénea en cantidades se puede extraer ρ y simplificar obteniéndose el miembro de la derecha de la última igualdad, que es la función distancia Lo mismo que en el caso anterior es posible llegar al resultado final en forma más directa porque $F(X^0, U^0) = 1$ y $F(X^1, U^0) = \rho = X^2 / X^1$.

LAS PRUEBAS DE CONSISTENCIA

Los números índices desarrollados por la teoría *tradicional* son funciones de agregación de componentes individuales que tienen diferentes unidades de medida y exhiben comportamientos variados, por lo que su evolución es indeterminada. Para resolver este problema se diseñaron entonces diferentes *pruebas* que esos agregados debieran aprobar para ser consistentes, entendiéndose que esto ocurre cuando tienen un comportamiento semejante al del precio o la cantidad de un solo bien. En un trabajo pionero Fisher (1922) analizó detalladamente numerosas pruebas de consistencia y más tarde Samuelson y Swamy (1974) demostraron que los índices de precios y de cantidades homotéticos superan las siguientes, consideradas las más importantes.

Proporcionalidad : Si entre dos períodos todos los precios o todas las cantidades cambian en la misma proporción, el índice debe ser igual al factor de proporcionalidad. Para el índice de precios esto se demuestra considerando que si $P^1 = \lambda{\cdot}P^0$ para todo $\lambda > 0$, luego:

$$(15) \qquad \frac{P(P^1)}{P(P^0)}=\frac{P(\lambda{\cdot}P^0)}{P(P^0)}=\frac{\lambda{\cdot}P(P^0)}{P(P^0)}=\lambda$$

debido a la homogeneidad lineal de la función de gasto. Para el índice de cantidades en que $Q^1 = \lambda{\cdot}Q^0$ también resulta que $Q(\lambda Q^0; Q^0) = \lambda$ debido a la homoteticidad de la función de utilidad.

Circularidad: Si un índice de precios o cantidades entre dos períodos se descompone, el cambio total es igual al producto del cambio de sus nuevos componentes, pues en este caso:

$$(16) \qquad P(P^2,P^1)\cdot P(P^1,P^0)=\frac{P(P^2)}{P(P^1)}\cdot\frac{P(P^1)}{P(P^0)}=\frac{P(P^2)}{P(P^0)}=P(P^2,P^0)$$

siendo la demostración referida al índice de cantidades idéntica, en cuyo caso se obtiene $Q(X^2, X^1) \cdot Q(X^1, X^0) = Q(X^2, X^0)$.

Inversión de tiempos: Esta prueba es un caso especial de la anterior e indica que si se multiplica el índice que mide el cambio entre un período y el siguiente por el que corresponde a éste y el anterior, el resultado debe ser 1. Para los precios sería:

$$(17) \qquad P(P^1,P^0)\cdot P(P^0,P^1) = \frac{P(P^1)}{P(P^0)}\frac{P(P^0)}{P(P^1)} = 1$$

y para las cantidades $Q(X^1, X^0) \cdot Q(X^0, X^1) = [Q(X^1)/Q(X^0)] / [Q(X^0)/Q(X^1)] = 1$.

Dimensionalidad: Todo índice debe ser independiente de las unidades en que se miden precios o cantidades. Los índices homotéticos superan esta prueba, pues para cambios tales que $X_j' = d_j \cdot X_j$ para $d_j > 0$, $j = 1, \ldots, n$ y $Q' = d_{n+1} \cdot Q$ resulta que $Q(X) = Q(X_1, \ldots, X_n) = Q(X_1' \cdot d_1^{-1}, \ldots, X_n' \cdot d_n^{-1}) = d_{n+1}^{-1} \cdot Q'(X_1', \ldots, X_n') = d_{n+1}^{-1} \cdot Q'(X')$, lo que a su vez implica que:

$$(18) \qquad Q'(X'^1, X'^0) = \frac{d_{n+1}\cdot Q(X^1)}{d_{n+1}\cdot Q(X^0)} = Q(X^1, X^0)$$

y del mismo modo se demuestra para el índice de precios que $P'(P'^1, P'^0) = P(P^1, P^0)$.

Inversión de factores: El producto entre el índice de precios y el de cantidades correspondiente debe ser igual al cociente entre los gastos totales en los dos períodos considerados. Para comprobarlo es necesario tener en cuenta que cuando la función de preferencias es homotética resulta que $P^i \cdot X^i = e(P^i) \cdot f(X^i)$ y por consiguiente:

$$(19) \qquad P(P^1,P^0)\cdot Q(X^1,X^0) = \left[\frac{e(P^1)}{e(P^0)}\frac{f(X^1)}{e(X^0)}\right] = \frac{e(P^1)}{e(P^0)}\left[\frac{P^1\cdot X^1}{e(P^1)} / \frac{P^0\cdot X^0}{e(P^0)}\right] = \frac{P^1\cdot X^1}{P^0\cdot X^0}$$

pero cuando en el proceso de minimización del gasto presentado en (7) se emplean precios normalizados de modo que la restricción de balance es $(P/M)\cdot X = 1$, resulta:

$$(19') \qquad P(P^1,P^0)\cdot Q(X^1,X^0) = \frac{P(P^1)}{P(P^0)} \cdot \frac{Q(X^1)}{Q(X^0)} = \frac{e(P^1)}{e(P^0)} \cdot \frac{1/e(P^1)}{1/e(P^0)} = 1$$

Estos resultados son importantes porque sugieren que los índices de Laspeyres y Geométrico superan todas esas pruebas debido a que las funciones de gasto mínimo que se obtienen en los procesos de optimización como el (7) que emplean funciones de agregación del tipo Leontief y Cobb Douglas respectivamente son homotéticas, como se verá con detalle más adelante. El índice de Tornqvist, en cambio, pasa todas las pruebas anteriores con excepción de las de circularidad y de inversión de factores, aunque en este ultimo caso el error es muy pequeño porque como también se analiza más adelante, este indicador es exacto para una función de agregación translogarítmica, que constituye una aproximación de segundo orden a la verdadera función de la que provienen los datos. Las pruebas realizadas con el índice ideal de Fisher demostraron finalmente que sólo falla en la de circularidad.

FUNCIONES DE AGREGACIÓN Y FÓRMULAS DE NÚMEROS ÍNDICES

Los desarrollos anteriores muestran entonces que los índices económicos no son otra cosa que el cociente entre funciones de gasto mínimo correspondientes a dos posiciones de equilibrio en el consumo o la producción para ciertas situaciones de precios y niveles de bienestar o actividad. Por consiguiente, la fórmula del índice dependerá de la especificación de las funciones de agregación de las que se derivan las funciones de gasto. Como esto es relativamente fácil de comprobar en algunos casos sencillos, en la parte que sigue mostraremos que el índice de cantidades de Laspeyres mide los desplazamientos del equilibrio en el consumo o la producción cuando la función de agregación es del tipo Leontief, que el índice Geométrico está asociado en esa forma con una especificación Cobb Douglas y que el del Tornqvist implica que la función de agregación es Translogarítmica. En todos los casos supondremos que el consumidor es tomador de precios y que sus *funciones de utilidad son linealmente homogéneas*.

Funciones de preferencia de Leontief

Comenzaremos con una función de utilidad que tiene una especificación del tipo Leontief, en la que $U = \min (X_i / b_i)$ para todo $b_i > 0$. En este caso el individuo combina los bienes que consume en proporciones fijas, dando origen a curvas de indiferencia que son ángulos rectos con el vértice en un rayo que parte del origen . El proceso de optimización (7) en este caso suele entonces plantearse así:

$$e(P,U^0)=\text{Min}\{\sum_{i=1}^{n} P_i \cdot X_i \,|\, \text{mínimo}\left(\frac{X_1}{b_1},...,\frac{X_n}{b_n}\right) \geq U^0; \forall X_i \geq 0\} = X(P,U^0)\cdot P$$

Con esos datos se construye la función de Lagrange $L = \Sigma_i^n P_i \cdot X_i - \lambda\, [(X_1 / b_1),..., (X_n / b_n) - U^0]$ y a partir de ella se obtienen las condiciones de primer orden para la existencia de un óptimo, que requieren que sus derivadas primeras se anulen, vale decir:

$$\frac{\partial L}{\partial X_i} = P_i - \frac{\lambda}{b_i} = 0 \qquad\qquad i = 1, ..., n$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = (\frac{X_1}{b_1},...,\frac{X_n}{b_n}) - U^0 = 0$$

Si luego se divide la i – ésima ecuación por la j – ésima y se despeja se obtiene $b_i = b_j \cdot (P_j / P_i)$, cuyo reemplazo en la última proporciona las funciones de demanda:

$$(20) \qquad X_i = U^0 \cdot b_j \cdot (\frac{P_j}{P_i})$$

que al reemplazarlas en la función objetivo permiten obtener la función de gasto:

$$(21) \qquad e\left(P, U^0\right) = U^0 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot P_i$$

Si esas funciones de gasto calculadas para los precios P^0 y P^1 de las situaciones inicial y final se reemplazan en el índice de precios (9) se obtiene:

(22) $$P\left(P^1,P^0,U^0\right)=\frac{e(P^1,U^0)}{e(P^0,U^0)}=\frac{\sum_{i=1}^{n} b_i \cdot P_i^1}{\sum_{i=1}^{n} b_i \cdot P_i^0}=\sum_{i=1}^{n} a_i^0 \cdot \left(\frac{P_i^1}{P_i^0}\right)$$

que no es otra cosa que el *índice de precios* de Laspeyres de la primera igualdad de la expresión (1). Además, y como se comentó oportunamente, el parámetro a_i^0 representa la participación del gasto realizado en el período inicial en el i – ésimo producto con respecto al gasto total (y sólo excepcionalmente sería igual a b_i).

Por su parte, el índice de cantidades calculado empleando la función indirecta de gasto tiene una especificación igual a (1'), pues resulta:

(22') $$Q\left(X^1,X^0,U^0\right)=\frac{F(X^1,U^0)}{F(X^0,U^0)}=\frac{\sum_{i=1}^{n} b_i \cdot X_i^1}{\sum_{i=1}^{n} b_i \cdot X_i^0}=\sum_{i=1}^{n} a_i^0 \cdot \left(\frac{X_i^1}{X_i^0}\right)$$

como se muestra en el Apéndice para el caso sencillo de dos bienes.

El caso de la función Cobb Douglas

Si la función de utilidad fuera del tipo $U = \Pi_i X_i^{ai}$ siendo además $\Sigma_i^n a_i = a$ (que además supondremos es igual a 1) el problema de optimización sería en este caso:

$$e(P,U^0)=\text{Min}\{\sum_{i=1}^{n} P_i \cdot X_i \mid X_1^{a_1} \cdot,\ldots,\cdot X_2^{a_2} \geq U^0, \forall X_i \geq 0\}=X(P,U^0)\cdot P$$

la función de Lagrange sería ahora $L = \Sigma_i^n P_i \cdot X_i - \lambda\ (\Pi_i X_i^{ai} - U^0)$ y las condiciones de primer orden éstas otras:

$$\frac{\partial L}{\partial X_i}=P_i-\lambda\frac{U^0}{X_i}=0 \qquad i = 1, \ldots , n$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=\prod_{i=1}^{n} X_i^{a_i}-U^0=0$$

cuya solución proporciona las funciones de demanda compensadas:

(23) $$X_i(P,U^0)=\left(\frac{a_i}{P_i}\right)\cdot\left[\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{P_i}{a_i}\right)^{a_i}\cdot U^0\right]^{1/a}$$

que reemplazadas en la función objetivo permiten obtener la función de gasto:

(24) $$e(P,U^0)=a\cdot\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{P_i}{a_i}\right)^{\frac{a_i}{a}}\cdot U^{0(1/a)}$$

Colocando estos resultados para los niveles de precios iniciales y finales y el nivel de bienestar U^0 en la fórmula del índice económico de precios (9) se obtiene:

$$(25) \qquad P\left(P^1,P^0,U^0\right)=\frac{e(P^1,U^0)}{e(P^0,U^0)}=\frac{e(P^1)}{e(P^0)}=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{P_i^1}{P_i^0}\right)^{a_i}$$

lo que significa que cuando la función de agregación es del tipo Cobb Douglas el índice de precios es una media geométrica del cambio de todos los precios entre ambos períodos, ponderados por la participación de cada producto en el gasto total, vale decir una expresión idéntica a la presentada en (3).

El índice de cantidades calculado empleando la función indirecta de gasto mínimo obtenida como se muestra en el Apéndice es idéntico a (3') pues resulta:

$$(25') \qquad Q\left(X^1,X^0,U^0\right)=\frac{F(X^1,U^0)}{F(X^0,U^0)}=\frac{f(X^1)}{f(X^0)}=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i^1}{X_i^0}\right)^{a_i}$$

Aquí conviene hacer dos aclaraciones importantes. En primer lugar, que cuando la función Cobb Douglas es homogénea de grado $\Sigma_i^n a_i = a$ y por consiguiente homotética, los índices de precios y cantidades son invariantes pues no dependen del bienestar de referencia U^0 porque como la función de gasto es separable en precios y nivel de utilidad este puede simplificarse, como muestran las expresiones anteriores. En segundo lugar, que sólo cuando $a = \Sigma_i^n a_i = 1$ y por consiguiente la función de utilidad es linealmente homogénea como se supone aquí, cada parámetro a_i representa la participación del gasto en el i – ésimo producto con respecto al total. Esto se comprueba teniendo en cuenta que la utilidad marginal que proporciona ese bien es $\delta U / \delta X_i = a_i \cdot U / X_i$ y la del ingreso $\delta M / \delta U = \lambda$, y que el consumidor comprará ese producto hasta que el valor de su utilidad marginal iguale a su precio. Esto último implica que $\lambda \cdot a_i \cdot U / X_i = P_i$ de donde se obtiene $a_i = P_i \cdot X_i / M$, pues con rendimientos constantes a escala tales que $\Sigma_i^n a_i = 1$, resulta que $\lambda \cdot U = M$.

Funciones de agregación Translogarítmicas

La función de utilidad o preferencias Translogarítmica tiene esta especificación:

$$\ln U=\ln a_0+\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot\ln X_i+½\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}\cdot\ln X_i\cdot\ln X_j$$

en la que U mide el bienestar del individuo y X_i para i, j = 1, ... , n las cantidades que consume del i – ésimo bien, y donde también a_0, a_i y $b_{ij} = b_{ji}$ son parámetros.

En una contribución muy importante al desarrollo de la teoría económica de los números índices Diewert (1976) demostró que los indicadores que están asociados con esas funciones de agregación son los índices de Tornqvist. Comienza el análisis señalando que si una función cuadrática linealmente homogénea dos veces diferenciable del tipo: $f(X) = a_0 + \Sigma_i^n a_i \cdot X_i + \Sigma_i^n \Sigma_j^n b_{ij} \cdot X_i \cdot X_j$, donde variables y parámetros tienen el mismo significado que antes, se expande como una serie de Taylor en la que se emplea el promedio de las derivadas para los valores que toman las variables en los períodos 0,1 y se descartan los términos de segundo orden, se obtiene el "lema de aproximación cuadrática de Theil" que tiene esta especificación:

(26) $$f(X^1)-f(X^0)\cong ½[\nabla f(X^1)+\nabla f(X^0)]^T\cdot(X^1-X^0)$$

y expresa el cambio en el valor de la función como el producto medio de los gradientes formados con las derivadas evaluadas en X^j para j = 0,1 y el cambio en las variables.

Aplica luego ese lema de aproximación cuadrática a la función de utilidad translogarítmica definiendo la siguientes expresiones X_i^1 = ln X_i^1, $f(X^1)$ = ln $f(X^1)$ y $\delta f(X^1) / \delta X_i = \delta \ln X^1 / \delta \ln X_i = [\delta f(X^1) / \delta X_i]\cdot [X_i^1 / f(X^1)]$ que emplea en la fórmula anterior; reemplazando luego las derivadas por las condiciones de primer orden para la maximización de la utilidad y haciendo uso de la homogenidad lineal de U obtiene:

(26') $$\ln f(X^1)-\ln f(X^0)=\sum_{i=1}^{n} ½(s_i^1+s_i^0)\cdot\left(\ln X_i^1-\ln X_i^0\right)$$

donde $s_i^j = P^j\cdot X_i^j / \Sigma_j P^j\cdot X^j$ es la proporción que representa el gasto en el i- ésimo insumo en el costo total del j-ésimo período.

La expresión $\nabla f(X^j)$ para j = 0, 1 se reemplaza siguiendo el procedimiento que se describe a continuación, que no se desarrolla en el trabajo de Diewert (1976) citado, y en el que por razones de simplificación se omiten los superíndices que indican el período : (i) Se parte de cualquiera de las derivadas del gradiente, como por ejemplo $\delta \ln X / \delta \ln X_i = [\delta f(X) / \delta X_i]\cdot [X_i / f(X)]$; (ii) En base al teorema de Euler, la función de agregación linealmente homogénea que se considera aquí puede presentarse también así $f(X) = \Sigma_i^n [\delta f(X) / \delta X_i]\cdot X_i$; (iii) Si en ese resultado se reemplaza por las condiciones de primer orden del proceso de maximización de la utilidad, que implican que $\delta f(X) / \delta X_i = \lambda\cdot P_i$, resulta $f(X) = \Sigma_i^n \lambda\cdot P_i \cdot X_i$; (iv) Dividiendo luego este último resultado por las condiciones de equilibrio de primer orden se obtiene $[\delta f(X) / \delta X_i] / f(X) = P_i / \Sigma_i^n P_i, \cdot X_i$ y (v) Si ese resultado se reemplaza finalmente en (i) resulta: $X_i \cdot P_i / \Sigma_i^n P_i, \cdot X_i = s_i$ siendo s_i^0 y s_i^1 en los períodos 0 y 1 respectivamente.

Tomando antilogaritmos, la expresión anterior se transforma en esta otra:

(27) $$Q(X^1,X^0,U^0)=\frac{f(X^1)}{f(X^0)}=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i^1}{X_i^0}\right)^{½(s_i^1+s_i^0)}$$

donde el miembro de la derecha de la última igualdad es el índice de cantidades de Tornqvist (4') utilizado por Christensen y Jorgenson (1970) como una aproximación discreta al índice Divisia. Diewert (1976) dice que este índice es *exacto* para una función translogarítmica, pero como ésta es una aproximación de segundo orden a la verdadera función, lo llama *superlativo*.

Si la utilidad estuviera representada por una función de gasto unitario Translogarítmica, empleando un razonamiento similar se demuestra que el índice de precios tiene esta especificación:

(27') $$P\left(P^1,P^0,U^0\right)=\frac{e(P^1)}{e(P^0)}=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{P_i^1}{P_i^0}\right)^{½\left(s_i^1+s_i^0\right)}$$

donde e(P) es la función directa de gasto y s_i^j tiene el mismo significado que antes, siendo también $P^i \geq 0$ y $X^i \geq 0$. El miembro de la derecha de la última igualdad es el índice de precios (4) presentado por Tornqvist como una aproximación discreta al índice Divisia, que por las mismas razones que el anterior también es superlativo.

En el Cuadro 3 se muestran esas relaciones exactas entre las funciones directas de gasto y los índices de precios empleando un ejemplo sencillo en el que se asignan valores plausibles a los parámetros, se fijan los precios de ambos períodos y se elige un nivel de bienestar de referencia. En el caso de la función de Leontief las cantidades óptimas que corresponden a los equilibrios inicial y final X_i^0 y X_i^1 se calculan empleando las expresiones (20), las funciones directas de gasto $e(P^j, U^0)$ con la (21), aunque también pueden obtenerse empleando la ecuación de balance $M^j = \Sigma_i^j P_i^j \cdot X_i^j$ para i = j = 0,1, y el índice de precios de Laspeyres $L(P^1,P^0, X^0)$ con la (22). Los resultados muestran que el cociente entre las funciones directas de gasto es igual al índice de Laspeyres, confirmando que éste es exacto para la función de Leontief. Además, indican que para mantener la utilidad U^0 luego de que los precios pasaran de P^0 a P^1 el consumidor debiera aumentar su gasto el 7,4%. En la segunda parte se presentan los resultados obtenidos empleando la función de preferencias Cobb Douglas que es dual al índice Geométrico, y en la tercera los que corresponden a la Translogartímica y el índice de Tornqvist, calculados en forma similar[7].

Cuadro 3[8]

Funciones de agregación y números índices

Funciones de Utilidad	**Cantidades** X^0	X^1	**Funciones De gasto** e(P, U)	e^1/e^0	**Indices de Precios**
Leontief	Parámetros $b_1 = 0{,}35$ y $b_2 = 0{,}65$				**Laspeyres**
Período 0	35	65	405		$L = 0{,}52\cdot(\frac{5}{6}) + 0{,}48\cdot(\frac{4}{3}) = 1{,}074$
Período 1	35	65	435	*1,074*	
Cobb Douglas	Parámetros $a_1 = 0{,}40$ y $a_2 = 0{,}60$				**Geométrico**
Período 0	57,73	155,18	775,92		$G = (\frac{5}{6})^{0,40}\cdot(\frac{4}{3})^{0,60} = 1{,}105$
Período 1	68,58	128,59	857,25	*1,105*	
Translogarítmica					**Tornqvist**
Parámetros $b_0 = 1$; $b_1 = 0{,}5$; $b_2 = 0{,}5$; $b_{11} = -0{,}025$; $b_{22} = -0{,}025$; $b_{12} = 0{,}05$					
Período 0	48,02	88,96	555		$T = (\frac{5}{6})^{\frac{0,52+0,51}{2}}\cdot(\frac{4}{3})^{\frac{0,48+0,49}{2}} = 1{,}048$
Período 1	58,87	71,80	581,56	*1,048*	

Nota: Los precios empleados son $P_1^0 = 6$, $P_2^0 = 3$, $P_1^1 = 5$, $P_2^1 = 4$ y el nivel de utilidad U =100.

Aunque en todos los casos los precios y el nivel de utilidad de referencia empleados fueron los mismos, los índices difieren porque las cantidades y las funciones directas de gasto no sólo dependen de las especificaciones de las funciones de agregación sino también de los parámetros elegidos. La comparación entre índices de cantidades y funciones indirectas de gasto proporcionaría resultados similares.

Los rendimientos a escala

Pero todos los índices comentados suponen que las funciones de agregación son linealmente homogénes, lo que implica rendimientos constantes a escala. En la teoría del consumo los efectos de escala pocas veces se tienen en cuenta porque no se consideran significativos. Pero la situación es diferente en los estudios de la producción porque aquí el tamaño suele ser importante. En este caso las participaciones de los gastos en los insumos con respecto al total deben corregirse por los efectos de escala. Para demostrarlo en el caso más general de la función Translogarítmica, dual a un índice de cantidades de Tornqvist, conviene suponer que los agregados representan ahora niveles de producción y se simbolizan por Q^j, para j = 1,2 y que los X^j son vectores de insumos empleados para obtener esos productos, siendo además $Q^j = f(X^j)$. En este caso el lema de aproximación cuadrática sería:

$$\ln Q^1 - \ln Q^0 \cong ½[\nabla \ln f(X^1) + \nabla \ln f(X^0)]^T \cdot (\ln X^1 - \ln X^0)$$

pero como $\delta \ln f(X^j) / \delta \ln X_i^j = [\delta f(X^j) / \delta X_i^j] \cdot [X_i^j / f(X^j)]$, también podría expresarse así:

$$\ln Q^1 - \ln Q^0 \cong ½\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial f(X^1)}{\partial X_i^1}\frac{X_i^1}{f(X^1)} + \frac{\partial f(X^0)}{\partial X_i^0}\frac{X_i^0}{f(X^0)}\right] \cdot (\ln X^1 - \ln X^0)$$

Reemplazando en el corchete por las condiciones de equilibrio en el mercado de factores que implican $[\delta f(X^j) / \delta X_i^j] = P_i^j / P^j$, donde P_i^j es el precio del i – ésimo recurso en el j – ésimo período y P^j el del producto, y multiplicando y dividiendo por $\Sigma_i P_i \cdot X_i$ se obtiene este resultado:

$$\ln Q^1 - \ln Q^0 \cong ½\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{P_i^1 \cdot X_i^1}{\sum_{i=1}^{n} P_i^1 \cdot X_i^1} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i^1 \cdot X_i^1}{P^1 \cdot Q^1} + \frac{P_i^0 \cdot X_i^0}{\sum_{i=1}^{n} P_i^0 \cdot X_i^0} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i^0 \cdot X_i^0}{P^0 \cdot Q^0}\right] \cdot (\ln X^1 - \ln X^0)$$

Los rendimientos se miden con la elasticidad escala, que se define como $\varepsilon^j = \Sigma_i [\delta f(X^j) / \delta X^j] \cdot [X_i^j / f(X^j)]$ pero que con la ayuda de las condiciones de equilibrio comentadas recién puede transformarse en $\varepsilon^j = \Sigma_i P_i^j \cdot X_i^j / P^j \cdot Q^j$. Recordando además que $s_i^j = P_i^j \cdot X_i^j / \Sigma_i P_i^j \cdot X_i^j$ y reemplazando, finalmente se llega a este resultado:

$$\ln Q^1 - \ln Q^0 \cong \sum_{i=1}^{n} ½(s_i^1 \cdot \varepsilon^1 + s_i^0 \cdot \varepsilon^0) \cdot \left(\ln X_i^1 - \ln X_i^0\right)$$

que es similar a (26'), sólo que aquí el agregado simbolizado por Q^j está recogiendo los rendimientos medidos por las elasticidades de escala ε^j. Tomando antilogaritmos el índice de Tornvist corregido por la elasticidad escala sería entonces:

$$(28) \qquad Q(X^1, X^0, P^1, P^0) = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i^1}{X_i^0}\right)^{½ \cdot (s_i^1 \cdot \varepsilon_i^1 + s_i^0 \cdot \varepsilon_i^0)}$$

Lo mismo que en el consumo, cuando las funciones de producción del tipo Cobb Douglas son linealmente homogéneas, las participaciones a_i de los índices Geométricos son iguales a los parámetros. La demostración es simple y se hace por pasos, omitiendo los superíndices para simplificar. En primer lugar, si en la restricción del costo de producción $C = \Sigma_i^n P_i \cdot X_i$ los precios se reemplazan por las condiciones de equilibrio, cuya expresión general es $P_i = (\delta Q / \delta X_i) / \lambda$, resulta que $\lambda \cdot C = Q$[9]. En segundo lugar, si en esa misma ecuación de balance se reemplaza el precio del i – ésimo bien por $P_i = a_i \cdot Q / \lambda \cdot X_i$, una expresión obtenida del sistema de ecuaciones de punto máximo, se alcanza este resultado C - $\Sigma_{j=2}^{n} P_j \cdot X_j = a_i \cdot Q / \lambda$. Finalmente, si en éste se sustituye por C = Q / λ proveniente del anterior, se obtiene $a_i = P_i \cdot X_i / C$. Pero la situación es distinta cuando existen efectos de escala medidos por la elasticidad escala ε, porque en este caso el resultado del primer paso anterior sería $C = \varepsilon \cdot Q / \lambda$ y su reemplazo en la expresión $P_i = a_i \cdot Q / \lambda \cdot X_i$ proporcionaría a su vez $s_i = P_i \cdot X_i / C = a_i \cdot \varepsilon^{-1}$. En este caso, para que los índices coincidan con el cociente entre las funciones directas de gasto, los ponderadores deben corregirse por los efectos de escala.

En resumen, entonces, cuando las funciones de agregación son linealmente homogéneas los parámetros de los números índices son iguales a las participaciones del gasto en cada producto con respecto al total. Cuando son homotéticas como en el caso recién considerado de homogeneidad de grado a > 1 por ejemplo, los cambios en el equilibrio medidos por el cociente entre las funciones de gasto seguirán siendo iguales a los índices cuando los ponderadores de éstos sean a su vez iguales a las participaciones en el gasto corregidas por las elasticidades escala (que no son fáciles de estimar en forma no paramétrica). Finalmente, en el caso en que las funciones de agregación no sean homotéticas deben emplearse funciones distancia en la forma que se comenta a continuación, porque a partir del cociente de las funciones de gasto mínimo no es posible ya obtener fórmulas de números índices.

Funciones de agregación no homotéticas

Sin embargo, si las funciones distancia que se utilizan en el caso no homotético tuvieran una especificación Translogarítmica, un destacado trabajo realizado por Caves, Christensen y Diewert (1982) demuestra que bajo ciertos supuestos no muy restrictivos es todavía posible agregar los componentes individuales empleando índices económicos. Para ello se emplean índices de cantidades similares a (12) pero expresados como $Q_i^0(X^1, X^0,Y)$ y $Q_i^1(X^1, X^0,Y)$, donde Y simboliza la cantidad de productos, los índices 0 y 1 señalan que se emplean funciones distancia que representan las tecnologías de esos períodos, e i que se trata de un índice referido a los insumos. Se supone también que los coeficientes de los términos de segundo orden de esas funciones distancia translogarítmicas son idénticos para ambas tecnologías, y que la producción es eficiente. En estas condiciones demuestran que la media geométrica de ambos indicadores proporciona es siguiente resultado:

$$(29) \qquad [Q_i^0(X^1,X^0,Y)\cdot Q_i^1(X^1,X^0,Y)]^{½} = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i^1}{X_i^0}\right)^{½(s_i^0+s_i^1)}$$

que señala que el índice de cantidades de Tornqvist es un índice superlativo exacto para la media geométrica de los índices de cantidades de Malmquist. Aunque este es un resultado similar a (27) tiene la ventaja de que se obtiene sin suponer que la función de agregación subyacente es linealmente homogénea, como aquel.

De un modo similar se demuestra también que bajo los mismos supuestos comentados antes el de Tornqvist es un índice superlativo exacto para la media geométrica de los índices de productos de Malmquist, y tiene esta especificación:

$$(30) \qquad [Q_o^0(Y^1,Y^0,X)\cdot Q_o^1(Y^1,Y^0,X)]^{½} = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{Y_i^1}{Y_i^0}\right)^{½(s_i^0+s_i^1)}$$

Además, este índice es el único que satisface la propiedad de homogeneidad que establece que si $Y^1 = \lambda \cdot Y^0$, luego $Q_o^1(Y^1, Y^0, X) = Q_o^0(\lambda \cdot Y^0, Y^0, X) = \lambda$.

¿Qué índice conviene emplear?

Como los índices están asociados con funciones de agregación que tienen diferentes especificaciones, la exactitud con que miden los cambios en los precios o las cantidades depende de la aproximación que logren esas funciones al comportamiento de las unidades de decisión. Aunque el índice de Laspeyres es el que más se emplea para calcular los agregados económicos, si uno tuviera que hacer un ordenamiento basado en la fidelidad de los resultados seguramente diria que es el menos adecuado. Esto se explica porque mide los cambios en el equilibrio del consumo o la producción empleando una función de Leontief y por consiguiente se asienta en el supuesto bastante restrictivo de que los bienes y servicios se combinan en proporciones fijas, que no varían ante cambios en sus precios relativos. En el otro estremo se ubica el de Tornqvist, porque como deriva de una función Translogarítmica permite que los productos se combinen en proporciones variables, que teóricamente pueden fluctuar entre menos y más infinito. El índice Geométrico se encuentra en una posición intermedia porque está asociado con una función Cobb Douglas que admite, aunque dentro de límites arbitrarios, que los productos se combinen en proporciones variables. (Las discrepancias en los resultados obtenidos cuando las funciones de agregación son linealmente homogéneas se analizaron al comentar el Cuadro 2).

Sin embargo, cuando se tiene en cuenta la facilidad con que puede calcularse cada uno de esos índices, el ordenamiento se invierte. Esto se debe a que todos ellos son promedios de los cambios en los precios o las cantidades de sus componentes, pero ponderados de distinta manera por su participación en el gasto total. Revisando el de Tornqvist se aprecia que emplea las participaciones de cada período, cuya estimación es un proceso complicado y lento porque descansa en datos de presupuestos de gasto de las familias o de censos económicos. Por el contrario, el de Laspeyres es el más simple porque sólo emplea las participaciones del período inicial, una característica que le permite también sacar ventajas sobre el de Paasche, que emplea las finales. Estas facilidades de cálculo habrían inducido a las oficinas de estadística de todo el mundo a emplear los índices de Laspeyres para medir agregados económicos importantes como el costo de vida, los salarios o la producción. Pero también debe haber influído la tradición, porque en su lugar podría emplearse el Geométrico, que es tan fácil de calcular como aquel pero proporcionaría una mejor aproximación al comportamiento de las unidades económicas.

INDICES DE PRODUCTIVIDAD

Los índices de cantidades de Malmquist también pueden emplearse para calcular la productividad total de los factores que también suele llamarse progreso técnico, que miden los cambios en el volumen de producción no explicados por cambios en el empleo de insumos. En líneas generales, la contribución de la productividad de los factores o progreso técnico puede medirse de dos formas. La primera, que es la que se utiliza aquí, consiste en comparar la producción que puede obtenerse con la tecnología disponible empleando un determinado nivel de insumos, con la que se podría alcanzar con los mismos insumos pero una nueva tecnología. La segunda, midiendo la diferencia en el empleo de insumos con los que dos tecnologías alternativas permiten obtener el mismo nivel de producción. Debido a esas características, suele decirse que el primer enfoque mide los cambios en la productividad con referencia a los productos, y el segundo a los insumos.

Cuando se supone que las unidades productivas son ***técnicamente eficientes*** la productividad puede calcularse relacionando la producción observada con la máxima que podría alcanzarse con la tecnología disponible y un nivel dado de insumos. Con las funciones distancia referidas a los productos que se comentan en el Apéndice y empleando la tecnología del período 0, el índice de productividad sería[10]:

$$(31) \qquad P_o^0(Y^1,Y^0,X^1,X^0)=\frac{D_o^0(Y^1,X^1)}{D_o^0(Y^0,X^0)}=D_o^0(Y^1,X^1)$$

donde el resultado final se explica porque cuando la producción es técnicamente eficiente D_o^0 (Y^0, X^0) = 1. Este índice es el menor factor con el que puede deflactarse el vector de productos Y^1 producido en el período 1 empleando X^1 insumos, para que se ubique sobre la superficie de producción en el período 0 (Y^1 / P_o^0). Si como es de esperar, en el período 1 la tecnología es superior a la del 0, entonces $P_o^0 > 1$.

Del mismo modo, empleando la tecnología del año 1 el índice sería:

$$(31') \qquad P_o^1(Y^1,Y^0,X^1,X^0)=\frac{D_o^1(Y^1,X^1)}{D_o^1(Y^0,X^0)}=\frac{1}{D_o^1(Y^0,X^0)}$$

porque la eficiencia técnica en este período implica que D_o^1 (Y^1, X^1) = 1.

Si se abandona el supuesto de que la producción es eficiente y se asume que las tecnologías de los períodos 0 y 1 son distintas, el ***índice de productividad de Malmquist*** se define como la media geométrica de los índices calculados con ambas:

$$(32) P_o(Y^1,Y^0,X^1,X^0)=[P_o^0(Y^1,Y^0,X^1,X^0)P_o^1(Y^1,Y^0,X^1,X^0)]^{½}=\left[\frac{D^0(Y^1,X^1)}{D^0(Y^0,X^0)}\frac{D^1(Y^1,X^1)}{D^1(Y^0,X^0)}\right]^{½}$$

un resultado que con eficiencia técnica en los dos períodos se transformaría en:

$$(33) \qquad P_o(Y^1,Y^0,X^1,X^0)=\left[\frac{D^0(Y^1,X^1)}{D^1(Y^0,X^0)}\right]^{½}$$

Si además se supone que las funciones distancia que representan las dos tecnologías tienen una especificación translogarítmica con términos de segundo orden idénticos, que existen rendimientos constantes a escala y que la producción es eficiente, Caves, Christensen y Diewert (1982) demostraron que el índice sería:

$$P_o(Y^1,Y^0,X^1,X^0)=½\sum_{i=1}^{n}(v_i^1+v_i^0)\cdot\left(\ln Y_i^1-\ln Y_i^0\right)-½\sum_{i=1}^{n}(s_i^1+s_i^0)\cdot\left(\ln X_i^1-\ln X_i^0\right)$$

o lo que es lo mismo, tomando antilogaritmos:

$$(34)\qquad P_o(Y^1,Y^0,X^1,X^0)=\left[\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{Y_i^1}{Y_i^0}\right)^{½(v_i^0+v_i^1)}/\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i^1}{X_i^0}\right)^{½(s_i^0+s_i^1)}\right]$$

lo que significa que aún en este caso es posible calcular la productividad total de los factores en forma no paramétrica, vale decir sin estimar las funciones de producción. Con rendimientos a escala esa expresión se transforma en esta otra:

$$(35)\qquad P_o(Y^1,Y^0,X^1,X^0)=\left[\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{Y_i^1}{Y_i^0}\right)^{½(v_i^0+v_i^1)}/\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i^1}{X_i^0}\right)^{½(s_i^0+s_i^1)}\right]\cdot\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i^1}{X_i^0}\right)^{½[s_i^0\cdot(1-\varepsilon^0)+s_i^1\cdot(1-\varepsilon^1)]}$$

donde ε^j para j = 0 y 1 mide la elasticidad escala de cada período. Lo mismo que en los casos anteriores cuando existen rendimientos decrecientes la elasticidad escala puede calcularse dividiendo el valor de los productos por el de los insumos. Pero como con rendimientos crecientes no existe una solución al problema de maximización de beneficios, los ingresos y costos observados no pueden emplearse para calcular los rendimientos. Por lo tanto, para emplear la fórmula anterior es necesario conocer ε.

Este resultado es una generalización de los estudios orientados a medir la importancia de la productividad total de los factores o del progreso técnico en procesos productivos de ***un solo producto***, recordados por del famoso “residuo” de Solow. Para comprobarlo supongamos una función de producción del tipo Y = f(X) en la que Y es la cantidad producida y X = (X_1, ... , X_n) el vector de insumos empleados. El aporte del progreso técnico P(Y,X) se mide en forma residual por la diferencia entre el ritmo de crecimiento de la producción y el de los insumos y se expresa así:

$$dY=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial f(X)}{\partial X_i}\right]\cdot dX_i+P(Y,X)$$

y si se dividen luego ambos miembros por Y y se multiplica y divide cada término del segundo miembro por X_i se obtiene la primera igualdad de la expresión siguiente. La segunda se alcanza suponiendo mercados de insumos competitivos de modo que δY / δX_i = P_i / P, siendo P el precio del producto y P_i el del i – ésimo recurso, y reemplazando otra vez resulta finalmente:

$$\frac{dY}{Y}=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial f(X)}{\partial X_i}\cdot\frac{X_i}{f(X)}\right]\cdot\frac{dX_i}{X_i}+P(Y,X)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{P_i\cdot X_i}{P\cdot Y}\right)\cdot\frac{dX_i}{X_i}+P(Y,X)$$

Pero considerando que dY / Y = d ln Y ≈ ln Y^1 – ln Y^0 y lo mismo para las variables que miden los insumos, la expresión anterior puede presentarse también de esta forma P(Y, X) = d ln Y^1 – d ln Y^0 - Σ_i^n $s_i\cdot$ (d ln X_i^1 – d ln X_i^0), donde X_i^j es ahora la cantidad del insumo i empleada en el período j = 0,1 y s_i = $P_i\cdot X_i$ / P·Y la participación del gasto en el i – ésimo recurso dentro del valor de la producción. Si se emplea la tecnología del período 0 esa expresión también puede expresarse así:

$$P_o^0(Y^1,Y^0,X^1,X^0)=\left(\frac{Y^1}{Y^0}\right)/\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i^1}{X_i^0}\right)^{s_i^0}$$

obteniéndose un resultado similar cuando se utiliza como referencia la tecnología del período 1, por lo que la media geométrica de ambos índicadores proporciona:

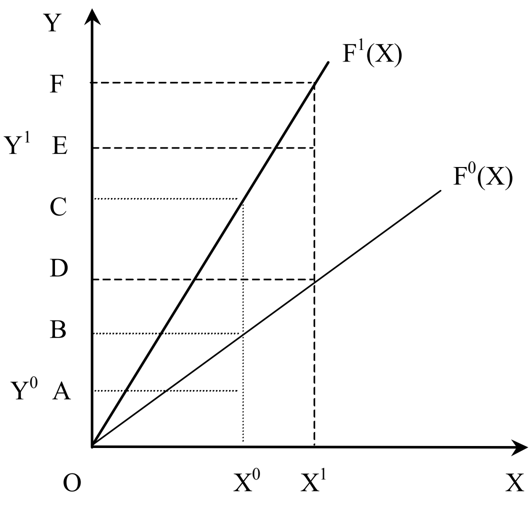
$$(36) \qquad P_o(Y^1,Y^0,X^1,X^0)=[P_o^0(.)\cdot P_o^1(.)]^{½} = \left(\frac{Y_i^1}{Y_i^0}\right) \Big/ \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i^1}{X_i^0}\right)^{½(s_i^0+s_i^1)}$$

un resultado similar a (34) que nos dice que el progreso técnico es igual al cociente entre la tasa de crecimiento de la producción y un índice de cantidades de insumos. Como aquí se supone que existen rendimientos constantes, si existieran rendimientos a escala las participaciones tendrían que corregirse como se mostró antes.

Pero el análisis anterior también puede ampliarse con el fin abandonar el supuesto de que las unidades productivas son eficientes en ambos períodos y por conguiente separar el impacto de la ***productividad total de los factores*** del que se debe a cambios en la ***eficiencia técnica***. Para hacerlo conviene ayudarse de la Figura 4 en la que se presentan dos procesos productivos sencillos que suponen la existencia de un insumo X y un producto Y. Las líneas F^0 (X) y F^1 (X) son funciones de producción que representan las tecnologías empleadas y como es usual muestran las máximas cantidades de producto que es posible obtener con cada nivel de insumos.

Figura 4

Indices de productividad de Malmquist



Cuando se emplea la tecnología del período 0, con X^0 unidades de insumo se obtienen Y^0 unidades de producto que se miden por el segmento OA, mientras que con la tecnología del período 1, X^1 unidades de insumo proporcionan Y^1 de producto, representadas ahora por OE. En ambos casos la unidad productiva no es técnicamente eficiente porque con esos insumos podría producir hasta OB unidades en el primer período y OF en el segundo. Además, como la eficiencia técnica se mide por la relación que existe entre la producción obtenida con cada nivel de insumos y la máxima que es posible alcanzar, en el primer caso sería ET^0 = OA / OB y en el segundo ET^1 = OE / OF. Obviamente, sólo cuando la firma opera sobre la frontera de producción ET = 1.

Para separar en el índice de productividad de Malmquist definido por la expresión (32) la contribución de la productividad total de los factores de la que se explica por cambios en la eficiencia técnica se cambia el orden de los numeradores, se multiplica y divide la expresión resultante por $D^1(Y^1, X^1) / D^0(Y^0, X^0)$ y finalmente se aplica la propiedad distributiva del producto respecto de la potencia, obteniéndose:

$$(37) \qquad P(Y^1,Y^0,X^1,X^0)=\left[\frac{D^1(Y^1,X^1)}{D^0(Y^0,X^0)}\right]\cdot\left[\frac{D^0(Y^0,X^0)}{D^1(Y^1,X^1)}\cdot\frac{D^0(Y^1,X^1)}{D^1(Y^0,X^0)}\right]^{½}$$

en el que el primer factor mide el cambio en la eficiencia técnica entre los períodos 0 y 1 y el segundo el promedio del cambio tecnológico que tuvo lugar entre ellos.

Para comprender mejor el significado de este resultado conviene ayudarse de la Figura 4, calculando las funciones distancia que corresponden a los niveles de producción e insumos cuando se emplean las tecnologías 0 y 1, que son las siguientes:

$$(38) \qquad D^0(Y^0,X^0)=\frac{OA}{OB} \quad D^0(Y^1,X^1)=\frac{OE}{OD} \quad D^1(Y^1,X^1)=\frac{OE}{OF} \quad D^1(Y^0,X^0)=\frac{OA}{OC}$$

La primera y la tercera son menores que 1 porque miden la eficiencia técnica cuando se emplean las tecnologías 0 y 1, mientras que las demás son mayores porque el progreso técnico entre esos períodos desplaza hacia arriba la frontera de producción.

Si esos valores se reemplazan en el índice de productividad de Malmquist (32) se obtiene el miembro de la derecha de la primera igualdad de la expresión siguiente. Intercambiando los denominadores (OA / OC) y (OA / OB), mutiplicando y dividiendo luego por el primer factor que ahora es [(OE / OF)·(OA / OB)] y operando, se obtiene:

$$(39) \qquad P(Y^1,Y^0,X^1,X^0)=\left[\frac{\frac{OE}{OF}}{\frac{OA}{OC}}\cdot\frac{\frac{OE}{OD}}{\frac{OA}{OB}}\right]^{½}=\left[\frac{\frac{OE}{OF}}{\frac{OA}{OB}}\right]\cdot\left[\frac{\frac{OE}{OD}}{\frac{OA}{OC}}\cdot\frac{\frac{OF}{OE}}{\frac{OB}{OA}}\right]^{½}=\left(\frac{OE}{OF}/\frac{OA}{OB}\right)\cdot\left(\frac{OF}{OD}\cdot\frac{OC}{OB}\right)^{½}$$

Ahora sí queda claro que el primer paréntesis mide el *cambio en la eficiencia técnica* entre ambos períodos, porque según se comentó más arriba ET^2 = OE / OF y ET^1 = OA / OB y el segundo el impacto de la *productividad total de los factores* o progreso técnico, pues es una media geométrica del aumento en la producción que es posible obtener empleando la tecnología 1 con respecto a la 0 y que viene medido por las relaciones OC / OB y OF / OD cuando se toman como referencia los niveles de producción X^0 y X^1 respectivamente. Pero hasta aquí parece haber llegado al menos hasta ahora la teoría económica de los números índices, porque para calcular estos indicadores es necesario estimar los parámetros de las funciones distancia, una tarea que generalmente se hace calculando fronteras de producción estocásticas, o fronteras de producción no paramétricas construídas empleando un método de programación lineal conocido con el nombre de Data Envelopment Analysis, o simplemente DEA.

RESUMEN Y COMENTARIOS FINALES

El empleo de los números índices en la teoría económica pura o aplicada constituye una respuesta a la necesidad de expresar en forma cuantitativa el comportamiento de un conjunto de variables individuales para las que no existen unidades físicas comunes, como ocurre con los bienes en la teoría del consumo o los insumos en la de la producción, por ejemplo. La suma o los promedios simples de precios o cantidades no son buenos indicadores del comportamiento del grupo porque no tienen en cuenta diferencias entre atributos comunes de sus componentes. Además, mientras más heterogéneo sea el conjunto menos representativa será la suma o el promedio, lo que impide hacer comparaciones en el tiempo o el espacio. La solución a estos problemas de agregación parece haber comenzado ponderando los componentes individuales con factores que representan atributos cuantificables de las variables relacionados con el comportamiento que se espera exprese el grupo. Sin embargo, cuando se quiere avanzar un poco más con el fin de explicar los cambios en esos indicadores, los cambios en los promedios de los precios y de las cantidades de sus componentes no proporcionan una buena medida de los cambios en aquellos. El desarrollo de los números índices apunta a resolver este problema.

Los trabajos de la teoría *tradicional* de los números índices tuvieron un enfoque puramente estadístico porque sus funciones de agregación consideraban a los componentes individuales variables independientes, sin tener en cuenta ningún modelo de comportamiento de la teoría económica. Los índices desarrollados dentro de ese enfoque que alcanzaron mayor difusión son los de Laspeyres, Pasche, Geométrico, Tornqvist y de Fisher. Pero la línea que separa el avance del enfoque tradicional con los desarrollos que ahora forman parte de la teoría económica de los números índices, también denominada *funcional* porque se asienta en modelos de comportamiento en el consumo o la producción, no es nítida. Esto se debe a que ya a comienzos del siglo pasado los economistas comenzaron a ocuparse de la especificación de los agregados económicos que proporcionan las soluciones de los modelos de optimización basados en funciones de preferencia o producción, un enfoque que recibió numerosas contribuciones en las últimas décadas.

Los índices económicos forman parte de la teoría económica porque miden en forma cuantitativa los desplazamientos del equilibrio en el consumo o la producción. En la teoría del consumo, por ejemplo, podría decirse que desagregan los cambios en el equilibrio provocado modificaciones en los precios y el ingreso real en los dos componentes tradicionales conocidos como efecto sustitución y efecto ingreso. El índice de precios, que mide el costo de vida, es una expresión sintética del primero mientras que el de cantidades, que capta los cambios en el nivel de vida, lo es del segundo. Lo mismo ocurre en el campo de la producción y de los costos. Por estas razones el índice económico de precios se definió como un cociente entre los gastos mínimos necesarios para conservar un nivel de bienestar o producción determinados en dos situaciones de precio distintas. En otras palabras, ese indicador estima el aumento en el gasto necesario para que el consumidor pueda mantener su bienestar o el productor su actividad inicial en una nueva situación de precios.

El índice de cantidades es también un cociente entre gastos mínimos, pero puede calcularse de tres maneras. Primero, relacionando las funciones directas de gasto que permiten alcanzar dos niveles de bienestar o producción distintos en una misma situación de precios. Segundo, diividiendo funciones indirectas de gasto correspondientes a distintas combinaciones de bienes que hacen posible mantener un cierto nivel de utilidad o producción. Finalmente, empleando funciones distancia, porque éstas miden la proporción en que debieran cambiar precios o cantidades para mantener el equilibrio con el mismo bienestar o volumen de producción. Pero esas formas de cálculo están relacionadas, porque como la función directa de gasto es igual a la inversa de la indirecta, los índices de cantidades calculados empleando los dos primeros enfoques son iguales. Además, como las funciones directa e indirecta de gasto pueden considerarse funciones distancia, los índices económicos de precios y cantidades definidos empleándolas también son funciones distancia.

Pero esos indices de precios y cantidades sólo son invariantes cuando las funciones de preferencia o de producción son homotéticas, pues en este caso las funciones de gasto son separables en precios o cantidades y niveles de bienestar o producción. Y debido a que éstos se mantienen en las dos situaciones de equilibrio, el valor del índice sólo depende de los precios o las cantidades iniciales y finales. Por otra parte, como los índices tradicionales son funciones de agregación que consideran a sus componentes individuales variables independientes, su evolución es indeterminada. Para resolver este problema se diseñaron entonces diferentes pruebas que deben aprobar para ser consistentes en la agregación, entendiéndose que esto ocurre cuando tienen un comportamiento análogo al del precio o la cantidad de un solo bien. El empleo de esas pruebas para evaluar el comportamiento de los indicadores económicos permitió también comprobar más tarde que los índices de precios y cantidades homotéticos superan las más importantes.

Los índices económicos son relaciones entre funciones de gasto correspondientes a dos posiciones de equilibrio en el consumo o la producción y por ese motivo su fisonomía depende de la especificación que tengan las funciones de preferencia o producción de las que aquellas derivan. Como esto es fácil de comprobar en algunos casos, el trabajo muestra que cuando la funcion de agregación es de Leontief el índice que mide con exactitud los desplazamientos en el equilibrio inducidos por cambios en los precios de los bienes o servicios es el de Laspeyres; que si la función de utilidad o producción tuviera una especificación de tipo Cobb Douglas el índice exacto sería el Geométrico, y que cuando la función de agregación es Translogarítmica el índicador propuesto por Tornqvist es un índice superlativo. Un ejemplo sencillo confirma luego esas relaciones, mostrando que los cocientes entre funciones de gasto proporcionan el mismo resultado que los números índices.

La relación dual que existe entre funciones de preferencia o producción y fórmulas de números índices analizada hasta aquí supone que aquellas son linealmente homogéneas. Si existen efectos de escala sólo se mantendrá en tanto los ponderadores de los números índices se ajusten empleando la elasticidad de escala. Además, desaparece en el caso de funciones de agregación no homotéticas porque desde el cociente de las funciones de gasto no es ya posible obtener las fórmulas de números índices. En estas condiciones deben emplearse funciones distancia. Y aunque en este caso las especificaciones elegibles son limitadas, el empleo de la Translogarítmica permite expresar los índices de precios o cantidades con la fórmula de Tornqvist.

La exactitud con que los índices económicos miden los cambios en precios o cantidades y las dificultades para estimarlos están inversamente relacionadas y dependen de la especificación de las funciones de agregación. El ordenamiento basado en la fidelidad de los resultados sugeriría que el de Tornqvist está en primer lugar y el de Laspeyres en el último, pero si se tienen en cuenta los esfuerzos necesarios para estimarlos esa sucesión se invertiría (en ambos casos el Geométrico se encuentra en el medio). El cálculo de diferentes índices para medir los cambios en precios y cantidades empleando un ejemplo sencillo mostró diferencias significativas. Tomando como referencia el índice ideal de Fisher se comprobó que el de Tornqvist proporciona resultados casi idénticos, que los de Laspeyres y Paasche son los que más se alejan y que el Geométrico se ubica en una posición intermedia. ¿Qué indice debiera emplearse, entonces?. Como es muy difícil eludir la atracción que ejerce la facilidad de cálculo, las recomendaciones sugerirían que a las estimaciones del índice de Laspeyres se agreguen las del Geométrico, porque no requiere información adicional, y que se mejore la recolección de datos para complementarlas con las de Tornqvist, porque de ese modo se lograría una mejor aproximación al comportamiento de las unidades de decisión (y también sería posible obtener los de Paasche y de Fisher).

El trabajo termina examinando cómo se calcula la productividad total de los factores empleando índices de cantidades basados en funciones distancia, y recordando que ese resultado es una generalización al caso de producción múltiple del famoso "residuo" de Solow. Además muestra que cuando las funciones distancia tienen una especificación translogarítmica con términos de segundo orden idénticos, existen rendimientos constantes a escala y la producción es eficiente, la media geométrica del índice de productividad es igual al cociente entre un índice de Tornqvist de productos y otro de insumos. Esto significa que los números índices permiten calcular la productividad total de los factores en forma no paramétrica, vale decir sin estimar las funciones de producción. Ese mismo análisis puede extenderse al caso en que existen efectos de escala. Sin embargo, cuando se lo amplía con el fin separar el impacto atribuíble a los cambios en la productividad de los que se deben a cambios en la eficiencia ya no es posible continuar empleando números índices sino que es necesario estimar los parámetros de las funciones distancia empleadas para ello.

APÉNDICE

La función indirecta de utilidad

Si sólo existieran los bienes X_1 y X_2 el proceso de maximización de la utilidad con la restricción del ingreso monetario que proporciona la *función indirecta de utilidad* V(P,M) sería:

(1) $$V(P,M^0)=Max_X\{X_1^{a_1}\cdot X_2^{a_2}\,|\sum_{i=1}^{n}P_i\cdot X_i\leq M^0,\forall\,X_i\geq 0\}=X(P,M^0)\cdot P$$

donde P_1 y P_2 son los precios de esos bienes y $U=X_1^{a_1}\cdot X_2^{a_2}$ la función de preferencias tipo Cobb Douglas. La función auxiliar de Lagrange sería ahora $L=X_1^{a_1}\cdot X_2^{a_2}-\lambda(P_1\cdot X_1+P_2\cdot X_2-M^0)$ y las condiciones de primer orden éstas otras:

(2) $$\frac{\partial L}{\partial X_1}=a_1\frac{U^0}{X_1}-\lambda\cdot P_1=0$$
$$\frac{\partial L}{\partial X_2}=a_2\frac{U^0}{X_2}-\lambda\cdot P_2=0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=P_1\cdot X_1+P_2\cdot X_2-M^0=0$$

Como se trata de un sistema de ecuaciones sencillo puede resolverse por sustitución de variables. Dividiendo la primera ecuación por la segunda y despejando resulta:

(3) $$X_2=\frac{a_2\cdot P_1\cdot X_1}{a_1\cdot P_2}$$

reemplazando luego esa expresión en la tercera se obtiene:

(4) $$P^1\cdot\left(\frac{a_1\cdot P_2\cdot X_2}{a_2\cdot P_1}\right)+P_2\cdot\left(\frac{a_2\cdot P_1\cdot X_1}{a_1\cdot P_2}\right)-M^0=0$$

y finalmente despejando X_1, reemplazando en (3) y operando se obtienen las funciones ordinarias de demanda, también llamadas Marshallianas, que tienen esta especificación:

(5a) $$X_1=\frac{a_1\cdot M^0}{(a_1+a_2)\cdot P_1}$$

(5b) $$X_2=\frac{a_2\cdot M^0}{(a_1+a_2)\cdot P_2}$$

cuya sustitución en la función objetivo proporciona la siguiente *función indirecta de utilidad*:

(6) $$V(P,M^0)=\left[\frac{a_1\cdot M^0}{(a_1+a_2)\cdot P_1}\right]^{a_1}\cdot\left[\frac{a_2\cdot M^0}{(a_1+a_2)\cdot P_2}\right]^{a_2}=\left[\frac{1}{(a_1+a_2)^{(a_1+a_2)}}\right]\cdot\left(\frac{a_1}{P_1}\right)^{a_1}\cdot\left(\frac{a_2}{P_2}\right)^{a_2}\cdot M^{0(a_1+a_2)}$$

en la que el bienestar del consumidor depende ahora de los precios de los bienes y su ingreso.

La función directa de gasto

Continuando con el caso simple de dos bienes el proceso de optimización que proporciona la *función de gasto mínimo* e(P,U) puede a su vez presentarse así:

(1) $$e(P,U^0) = \text{Min}\{\sum_{i=1}^{n} P_i \cdot X_i \mid X_1^{a_1} \cdot X_2^{a_2} \geq U^0, \forall\ X_i \geq 0\} = X(P,U^0)\cdot P$$

donde la función auxiliar de Lagrange ahora es L= $P_1 \cdot X_1 + P_2 \cdot X_2 - \lambda(X_1^{a1} \cdot X_2^{a2} - U^0)$ y las condiciones de primer orden para la existencia de un mínimo estas otras:

(2) $$\frac{\partial L}{\partial X_1} = P_1 - \lambda a_1 \frac{U^0}{X_1} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial X_2} = P_2 - \lambda a_2 \frac{U^0}{X_2} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = X_1^{a_1} \cdot X_2^{a_2} - U^0 = 0$$

y también aquí para resolver el sistema se dividen las dos primeras ecuaciones y se despeja:

(3) $$X_2 = \frac{a_2 \cdot P_1 \cdot X_1}{a_1 \cdot P_2}$$

reemplazando luego esa expresión en la tercera resulta:

(4) $$U^0 = X_1^{a_1} \cdot \left(\frac{a_2 \cdot P_1 \cdot X_1}{a_1 \cdot P_2} \right)^{a_2} = X_1^{a_1} \cdot X_1^{a_2} \cdot \left(\frac{a_2 \cdot P_1}{a_1 \cdot P_2} \right)^{a_2} = X_1^{a_1+a_2} \cdot \left(\frac{a_2 \cdot P_1}{a_1 \cdot P_2} \right)^{a_2}$$

y finalmente resolviendo para X_1, reemplazando en (2) y operando, se obtienen las siguientes funciones de demanda compensadas, también denominadas Hicksianas:

(5a) $$X_1 = \left(\frac{a_1 \cdot P_2}{a_2 \cdot P_1} \right)^{\frac{a_2}{a_1+a_2}} \cdot U^{0(\frac{1}{a_1+a_2})}$$

(5b) $$X_2 = \left(\frac{a_2 \cdot P_1}{a_1 \cdot P_2} \right)^{\frac{a_1}{a_1+a_2}} \cdot U^{0(\frac{1}{a_1+a_2})}$$

Sustituyendo esos resultados en la función objetivo se obtiene la de gasto igual a:

(5) $$e(P,U^0) = P_1 \cdot \left(\frac{a_1 \cdot P_2}{a_2 \cdot P_1} \right)^{\frac{a_2}{a_1+a_2}} \cdot U^{0(\frac{1}{a_1+a_2})} + P_2 \cdot \left(\frac{a_2 \cdot P_1}{a_1 \cdot P_2} \right)^{\frac{a_1}{a_1+a_2}} \cdot U^{0(\frac{1}{a_1+a_2})} = k \cdot P_1^{\frac{a_1}{a_1+a_2}} \cdot P_2^{\frac{a_2}{a_1+a_2}} \cdot U^{0(\frac{1}{a_1+a_2})}$$

donde $k = \{(a_1 + a_2) / [a_1^{a_1/(a_1+a_2)} \cdot a_2^{a_2/(a_1+a_2)}]\}$.

La función indirecta de gasto

Continuando con el ejemplo anterior en el que sólo existen dos productos, el proceso de optimización que permite obtener la *función indirecta de gasto mínimo* $F(X, U^0)$ sería ahora:

(1) $$F(X,U^0) = \text{Min}\{\sum_{i=1}^{n} P_i \cdot X_i \mid V(P,M) \leq U^0, \forall\ X_i \geq 0\} = P(X,U^0)\cdot X$$

donde V(P,M) es la función indirecta de utilidad examinada más arriba.

En este caso la función auxiliar de Lagrange es igual a $L = P_1 \cdot X_1 + P_2 \cdot X_2 - \lambda[(a+b)^{-(a+b)} \cdot (a / P_1)^a \cdot (b / P_2)^b - U^0]$ y las condiciones de primer orden éstas otras:

$$\frac{\partial L}{\partial P_1} = X_1 - (-\frac{a}{P_1}) \cdot \lambda \cdot (a+b)^{-(a+b)} \cdot (\frac{a}{P_1})^a \cdot (\frac{b}{P_2})^b = 0$$

(2)
$$\frac{\partial L}{\partial P_2} = X_2 - (-\frac{b}{P_2}) \cdot \lambda \cdot (a+b)^{-(a+b)} \cdot (\frac{a}{P_1})^a \cdot (\frac{b}{P_2})^b = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = (a+b)^{-(a+b)} \cdot (\frac{a}{P_1})^a \cdot (\frac{b}{P_2})^b - U^0 = 0$$

cuya solución se calcula procediendo lo mismo que en los casos anteriores, vale decir dividiendo la primera ecuación por la segunda y despejando, en cuyo caso se obtiene:

(3)
$$P_2 = \frac{a_2 \cdot P_1 \cdot X_1}{a_1 \cdot X_2}$$

y si ese resultado se reemplaza luego en la tercera ecuación resulta:

(4)
$$U^0 = X_1^{a_1} \cdot \left(\frac{a_2 \cdot P_1 \cdot X_1}{a_1 \cdot P_2} \right)^{a_2} = X_1^{a_1} \cdot X_1^{a_2} \cdot \left(\frac{a_2 \cdot P_1}{a_1 \cdot P_2} \right)^{a_2} = X_1^{a_1+a_2} \cdot \left(\frac{a_2 \cdot P_1}{a_1 \cdot P_2} \right)^{a_2}$$

Despejando luego P_1, sustituyendo en (3) y desepejando se obtienen ahora las siguientes funciones inversas de demandas ordinarias o Marshallianas:

(4a)
$$P_1 = \left(\frac{a_1}{a_1 + a_2} \right) \cdot \left[\frac{(X_2 / X_1)^{a_2}}{U^0} \right]^{\frac{1}{a_1+a_2}}$$

(4b)
$$P_2 = \left(\frac{a_2}{a_1 + a_2} \right) \cdot \left[\frac{(X_1 / X_2)^{a_2}}{U^0} \right]^{\frac{1}{a_1+a_2}}$$

y la sustitución de esos resultados en la función objetivo proporciona la siguiente *función indirecta de gasto mínimo* que corresponde a un nivel de bienestar U^0 y cantidades X :

(5)
$$F(X,U^0) = \left(\frac{a_1}{a_1 + a_2} \right) \cdot \left[\frac{(X_2 / X_1)^{a_2}}{U^0} \right]^{\frac{1}{a_1+a_2}} \cdot X_1 + \left(\frac{a_2}{a_1 + a_2} \right) \cdot \left[\frac{(X_1 / X_2)^{a_2}}{U^0} \right]^{\frac{1}{a_1+a_2}} \cdot X_2 = \left(\frac{X_1^{a_1} \cdot X_2^{a_2}}{U^0} \right)^{\frac{1}{a_1+a_2}}$$

A partir de esa expresión se obtiene el siguiente índice de cantidades:

(6)
$$X\left(X^1, X^0; U^0\right) = \left(\frac{X_1^1}{X_1^0} \right)^{a_1} \cdot \left(\frac{X_2^1}{X_2^0} \right)^{a_2} = \prod_{i=1}^{2} \left(\frac{X_i^1}{X_i^0} \right)^{a_i}$$

La función distancia

La función distancia es de gran utilidad para definir y calcular índices de productividad, y por ese motivo en la parte que sigue desarrollaremos el análisis haciendo referencia a funciones de producción. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que el análisis es similar cuando se emplean las funciones de preferencia en la teoría del consumo. En la producción, la función distancia puede definirse en el espacio de los insumos o los productos. Cuando está referida a los *insumos* mide la distancia entre un cierto producto Y y un vector de insumos X, como el máximo valor de un escalar ρ tal que ese vector corregido por el escalar sea alcanzable. Simbólicamente se presenta así:

(1)
$$D_i^t\,(X, Y) = \text{Max}\,\{\, \rho \mid (X / \rho) \in L(Y) \,\} = \rho\,(X; Y) \qquad \text{para } t = 0, 1$$

El subíndice i indica que esa función distancia está referida a los insumos, t es el período al que corresponde la tecnología y L(Y) el conjunto de vectores de insumos X con los que se puede producir Y. En el gráfico siguiente L(Y) está representado por la isocuanta Y = f(X) y el área que se encuentra por encima de ella cuando se emplea la tecnología inicial, porque no es posible producir Y con menos insumos; algo que podría ser posible con una nueva tecnología. La función distancia es decreciente en Y y no decreciente y linealmente homogénea en X. Además, el valor de la función que desplaza el vector representado por el punto X^1, que implica el empleo de X_1^1 y X_2^1 de cada bien, al X’ es:

$$D_i^t\,(X^1, Y) = \rho = OX^1 / OX'' > 1$$

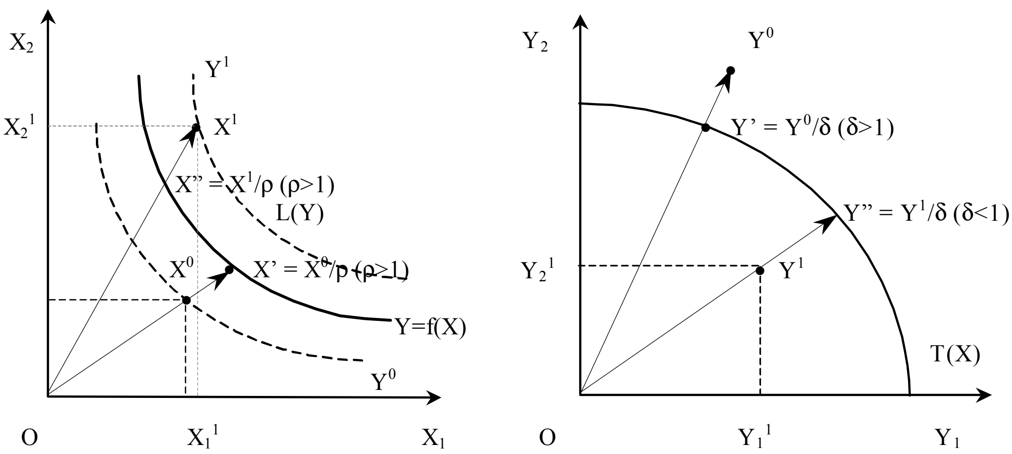
lo que significa que para llevar el vector X^1 al nivel X” sobre la isocuanta Y es preciso dividirlo por una función distancia que tiene un valor mayor que uno, vale decir $X'' = X^1 / D_i^t\,(X^1, Y)$. Si se tratara del vector X^0 ubicado por debajo, la función distancia sería $D_i^t\,(X^0, Y) = \rho = OX' / OX^0 < 1$. Finalmente, si el vector se encontrara sobre la isocuanta como X’, la función distancia sería $D_i^t\,(X, Y) = \rho = OX' / OX' = 1$. Además, como la función distancia depende de la tecnología, cuando se emplea la tecnología del período 0 es distinta que cuando se utiliza la del 1, lo que implica que $D_i^0\,(X, Y) \neq D_i^1\,(X, Y)$.

El índice de *cantidades de insumos* se calcula dividiendo las distancias entre dos vectores y un nivel de producción, como X^0, X^1 e Y de la Figura A.1. Con la tecnología 0 sería:

(2) $$Q_i^0(X^1, X^0, Y) = \frac{D_i^0(X^1, Y)}{D_i^0(X^0, Y)}$$

y $Q_i^1(X^1, X^0, Y) = D_i^1\,(X^1, Y) / D_i^1\,(X^0, Y)$ si se empleara la del período 1. Si las funciones son homotéticas en insumos el índice es independiente de la producción de referencia (Fare, 1995).

Figura A.1
La función distancia



(a) Referida a insumos (b) Referida a productos

La función distancia referida a los ***productos*** se define a su vez de este modo:

(1b) $$D_o^t\,(X, Y) = \text{Min}\,\{\,\delta \mid (Y / \delta) \in T(X)\,\} = \delta\,(X; Y) \quad \text{para } t = 0, 1$$

donde Y = T(X) es el conjunto de vectores de productos Y que pueden producirse con X, y δ el menor factor con el que se puede deflactar un vector de productos Y para obtenerlo empleando los insumos X. En la Figura A.2 la curva T = T(Y) y todos los puntos que se encuentran por debajo representan las posibilidades de producción cuando se emplea la tecnología inicial, porque no es posible producir por encima con esa cantidad de insumos, aunque eso podría ocurrir con una nueva tecnología. La función distancia es creciente en Y y no decreciente y linealmente homogénea en X. Además, el valor que desplaza el vector Y^0, conformado por Y_1^0 unidades del primer bien e Y_2^0 del segundo, al Y' es:

$$D_o^t (Y^1, X) = \delta = OY^0 / OY' > 1$$

lo que quiere significa que para llevar el vector Y^0 al nivel de la curva T(X) se lo divide por una función distancia mayor que 1, vale decir $Y' = Y^0 / D_o^t (Y^1, X)$. En términos más generales se dice que si un vector $Y \in T(X)$, luego $D_o^t (Y, X) \geq 1$, y en el caso específico en que ese vector se encuentre sobre en la frontera, lo que significa que $Y \in T(X)$, resulta que $D_o^t (Y, X) = 1$. Además, como la función distancia depende de la tecnología debiera ser $D_o^0 (Y, X) \neq D_o^1 (Y, X)$.

Esta función distancia permite calcular un *índice de cantidades de productos* de Malmquist dividiendo las distancias que existen entre un par de vectores como Y^0 e Y^1 con respecto a un determinado agregado, como podría ser una curva de transformación T(X). Utilizando la tecnología del período 0 ese indicador se obtiene haciendo:

(2b) $$Q_o^0(Y^1, Y^0, X) = \frac{D_o^0(Y^1, X)}{D_o^0(Y^0, X)}$$

mientras que si se empleara la del 1 sería $Q_o^1 (Y^1, Y^0, X) = D_o^1 (Y^1, X) / D_o^1 (Y^0, X)$. Si las funciones fueran homotéticas en productos el índice no depende de los insumos de referencia.

Además, si el nivel de insumos de referencia fuera ahora el vector X^0 que define una nueva frontera de producción que pasa por Y^0, el índice de cantidades sería $Q_o^0 (Y^1, Y^0, X^0) = D_o^0 (Y^1, X^0) / D_o^0 (Y^0, X^0) = D_o^0 (Y^1, X^0)$ porque como el vector Y^0 se encuentra sobre la frontera de producción $T(X^0)$ resulta que $D_o^0 (Y^0, X^0) = 1$. En este caso el índice de cantidades de productos es igual a la función distancia, lo mismo que ocurría con el de cantidades de insumos. También aquí la media geométrica de los indices 0 y 1 aproxima al ideal de Fisher.

REFERENCIAS

Blackorby Ch., D.Primont y R.R.Russell (1978): *Duality, separability and functional structure: Theory and economic applications*. North Holland, Nueva York.

Blackorby Ch. y R.R.Russell (1978): "Indices ands subindices of the cost of living and the standard of living", *International Economic Review* (19): 229 – 240.

Bjurek, H. (1996): "The Malmquist total factor productivity index", *Scandinavian Journal of Economics* (98): 303 – 313.

Caves, D.W., L.R.Christensen y W.E.Diewert (1982): "The economic theory of index numbers and the measurement of input, output and productivity", *Econometrica* (50): 1393 – 1414.

Coelli, T., D.S.Rao. y G.E. Battese (2000): *An introduction to efficiency and productivity analysis*, Kluwer Academic Publishers, Estados Unidos.

Delfino, J. A. (1987): "Eficiencia, apertura de la economía y concentración industrial en Argentina, *Económica* (La Plata) XXXIII (1): 51 – 84.

Diewert, W.E. (1992) "Fisher ideal output, input and productivity indexes revisited", *Journal of Productivity Analysis* (3): 211 – 248.

Diewert, W.E. (1990): *Price level measurement*, North Holland, Holanda.

Diewert, W.E. (1976): "Exact and superlative index number", *Journal of Econometrics* (4): 115-145

Fare, R.S. y S.Grosskopf (1996): *Intertemporal production frontiers: with dymamic DEA*, Kluwer Academic Publishers, Estados Unidos.

Fisher, Irvin (1922): *The making of index numbers*, Houghton Mifflin, Boston.

Grifell – Tatjé, E y C.A.K.Lovell (1995): "A note on the Malmquist productivity index", *Economic Letters* (47): 169 – 197.

Konus A.A. (1924): "The problem of the true index of the cost of living", publicado en *Econometrica* (7): 10- 29.

Malmquist S. (1953): "Index numbers and indiference surfaces", *Trabajos de Estadística* (IV): 209 – 241.

Samuelson P.A. y S.Swamy (1974): "Invariant economic index numbers and canonical duality: Survey and synthesis", *American Economic Review* (64): 566 – 593.

Solow, Robert M. (1956) : "A Contribution to the Theory of Economic Growth", *Quarterly Journal of Economics* (70): 65 - 94.

Varian, H.(1992): *Análisis microeconómico*, Antoni Bosch Editor, Barcelona.

Vartia, Yrjo (1983): "Efficient methods of measuring welfare change and compensated income in terms of ordinary demand functions", *Econometrica* (51): 79 - 98.

Wald, A. (1939): "A new formula for the index of the cost of living", *Econometrica* (7): 319 – 331.

Notas

[1] La media geométrica se define como la raíz k - ésima del producto de cada variable Y_i elevada a su correspondiente frecuencia k_i y se simboliza $M_G(Y)=\sqrt[k]{\prod_i^n Y_i^{k_i}}$, siendo $\Sigma_i^n\ k_i = k$.

[2] Como se supone que el individuo es tomador de precios, la recta de balance se obtiene a partir de la igualdad $M = P_1^0 \cdot X_1^0 + P_2^0 \cdot X_2^0$ y tiene esta especificación $X_2^0 = (M / P_2^0) - (P_1^0 / P_2^0) \cdot X_1^0$. Sin embargo, cuando el análisis se desarrolla en el espacio de los precios suele expresarse también así $P_2^0 = (M / X_2^0) - (X_1^0 / X_2^0) \cdot P_1^0$, como se verá más adelante.

[3] Esos ajustes imaginarios en el ingreso monetario constituyen lo que Hicks llamó *variación compensatoria*. Con ellos midió el “efecto sustitución”, que es el cambio en el consumo asociado con el desplazamiento del equilibrio de E a E” provocado por una modificación en los precios mientras el ingreso real se mantiene (porque el individuo permanece sobre la misma curva de indiferencia). El movimiento final de E” a E’, que se explica por el aumento en el ingreso real derivado de “anular” esa compensación imaginaria, constituye el “efecto ingreso”. La suma de ambos se denomina “efecto total”. Con la *variación equivalente* el análisis es similar, aunque en este caso el ingreso se ajusta para que el individuo pueda mantenerse sobre la curva de indiferencia final en lugar de la inicial.

[4] Las curvas de indiferencia de la Figura 1 se dibujaron de modo que sean paralelas entre sí porque se supone que provienen de una función de utilidad directa homotética. Como consecuencia de ello, la distancia que existe entre los puntos E’ y E” que se encuentran sobre la isoclina X^0, es la misma que la que separa a los ubicados sobre X^1. Algo similar ocurre con las curvas de indiferencia de la Figura 2, lo que significa que las distancias entre E y E” que están sobre el rayo P^0 son iguales a los puntos de equilibrio ubicados a lo largo de P^1.

[5] Las curvas de indiferencia de las funciones de preferencia homotéticas se obtienen por expansión radial de cualquiera de ellas. Además, todas las funciones ordinarias de demanda que derivan de esas funciones tienen elasticidad - ingreso unitaria.

[6] Este índice de cantidades también puede calcularse dividiendo el índice de valor definido como $V(X^1, X^0, P^1, P^0) = e(P^1, U^1) / e(P^0, U^0)$ por el de precios, en cuyo caso se obtiene $Q(X^1, X^0, P^1) = [e(P^1, U^1) / e(P^0, U^0)] / [e(P^1, U^0) / e(P^0, U^0)] = e(P^1, U^1) / e(P^1, U^0)$.

[7] Sin embargo, en este último caso el procedimiento fue algo más complicado porque como no es posible obtener una función directa de gasto empleando el proceso de minimización (7) fue necesario calcular las cantidades X_i^j resolviendo un sistema de ecuaciones obtenido a partir de las siguientes derivadas de la función Translogartímica: $\delta \ln U / \delta \ln X_i = P_j \cdot X_j / M = \Sigma_i\ \delta \ln U / \delta \ln X_i$ donde $P_j \cdot X_j / M = s_j$, por ejemplo (Christensen, Jorgenson y Lau, 1975). La solución proporciona las cantidades óptimas que junto a la ecuación de balance permiten calcular el gasto mínimo correspondiente a las dos posiciones de equilibrio, y también el índice de Tornqvist.

[8] La Licenciada Sofía Devalle ha colaborado en la preparación de este ejemplo.

[9] Esto es así porque cuando la función de agregación es linealmente homogénea y por consiguiente exhibe rendimientos constantes a escala, aplicando el teorema de Euler resulta que $Q = \Sigma_i^n\ [\delta f(X) / \delta X_i] \cdot X_i$.

[10] El significado de eficiencia técnica y en la asignación se puede consultar en Delfino (1987).